Álgebra Lineal Computacional

Segundo Cuatrimestre 2022

Trabajo Práctico N° 1.

El objetivo de este trabajo práctico es implementar el método de la potencia y analizar mediante simulaciones la velocidad de convergencia del método.

Ejercicio 1.
Hacer un programa que reciba una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y un entero positivo k y que aplique k iteraciones del método de la potencia con un vector aleatorio inicial $v \in \mathbb{R}^n$. El programa debe devolver un vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^k$, donde a_i sea la aproximación al autovalor obtenida en el paso i.

Recomendaciones:
Recordar normalizar el vector en cada paso.
Pueden comparar con np.linalg.eigvals() para verificar resultados.

Ejercicio 2.

(a) Tomar una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ de coordenadas aleatorias y utilizar el programa para realizar 100 iteraciones del método.

(b) Graficar las aproximaciones obtendidas en función del número de iteraciones.
¿Considera que el método converge rápidamente?

Recomendaciones:
En este caso comparar con un vector (np.linalg.eigvals()) no es útil. Queremos comparar sólo con el autovalor de módulo máximo de ese vector ¿Qué norma vectorial podemos usar?

Analíticamente, puede verse que la velocidad de convergencia está dada por la relación entre el segundo autovalor de mayor módulo y el primer autovalor de mayor módulo.
Más precisamente, el error en cada paso se multiplica aproximadamente por $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2$.

Ejercicio 3.

(a) Tomar una matriz $C \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ de coordenadas aleatorias y considerar la matriz simétrica $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(C + C^t)$ (*veremos próximamente que es una forma de asegurarnos una matriz con todos sus autovalores reales*).
Definir $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + 500\boldsymbol{I}$ y aplicar 100 pasos del método de la potencia a $\boldsymbol{B}$.

(b) Llamamos $\lambda_{\max}$ al autovalor de mayor módulo de $\boldsymbol{B}$ y definimos el vector de errores $e \in \mathbb{R}^{100}$:

$$e_i = |\lambda_{\max} - a_i|.$$

Graficar los errores en función del número de iteración ¿Puede decir que función es?

(c) Graficar $\log(e_i)$ y volver a pensar el ítem (b).
Sabiendo que el factor por el que se multiplica el error es aproximadamente $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2$, la pendiente de la recta obtenida debería ser aproximadamente $2.log(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})$.
Para comparar los valores obtenidos experimentalmente, en el mismo gráfico representar la función $y(x) = 2.log(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})x + log(e_0)$.

Recomendaciones:
Se puede usar la función sorted() para ordenar los coeficientes de un vector. En este caso que trabajamos con una matriz simétrica también puede ser útil la función np.linalg.eigh().

Ejercicio 4.
Repetir el experimento utilizando $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + K\boldsymbol{I}$, para $K = 1000$, $K = 2000$ y $K = 5000$.
¿Por qué la velocidad de convergencia disminuye?

Observación:
Esperamos que las respuestas a las preguntas las hagan de manera simple y coloquial, no pretendemos formalismo en el texto a presentar.