Álgebra Lineal Computacional

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica N° 5: Métodos iterativos para sistemas lineales.

Ejercicio 1. Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con las siguientes condiciones:

- que finalice si el método se estaciona,
- que finalice con una advertencia si se excede cierto tope de iteraciones.

Sugerencia: investigar los comandos np. tril , np. triu y np.diag.

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ acota inferiormente a toda norma de $\boldsymbol{A}$, sin utilizar normas complejas.

Dada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $\lambda = a+ib$ un autovalor de $\boldsymbol{A}$ y sea $\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcular $\boldsymbol{Au}$ y $\boldsymbol{Av}$ y probar que:

$$\|\boldsymbol{Au}\|_2^2 + \|\boldsymbol{Av}\|_2^2 = (a^2+b^2)(\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}\|_2^2).$$

b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|\boldsymbol{A}\|_2.$$

c) Probar que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$ vale que

$$|\lambda| \leq \|\boldsymbol{A}\|.$$

Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^m$, entonces λ^m es autovalor de $\boldsymbol{B}$.

Ejercicio 3. Considerar el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = (1, 2)^t$.

a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verificar, sin embargo, que la matriz no es diagonal dominante.

b) Sea $\boldsymbol{J}$ la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de $\boldsymbol{J}$.
¿Contradice la convergencia del método?

c) Hallar una norma $\|\ \|$ en la cual $\|\boldsymbol{J}\|$ sea < 1.
Sugerencia: Considerar una base de autovectores de $\boldsymbol{J}$.

Ejercicio 4. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿Y simétrica y definida positiva?

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.

a) Mostrar que toda matriz $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $|\det(\boldsymbol{B})| > 1$ tiene un autovalor λ, real o complejo, con $|\lambda| > 1$.

b) Decidir si el método de Jacobi converge o no para un sistema dado por la matriz
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Probar que el método de Jacobi converge para todo sistema de 2×2 dado por una matriz simétrica y definida positiva.

Ejercicio 7. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{B}^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia del método de Jacobi aplicado a la resolución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$.

Ejercicio 8.

a) Sean $\boldsymbol{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $\boldsymbol{M}$ inversible. Probar que los autovalores de $-\boldsymbol{M}^{-1}N$ son las raíces del polinomio $\det(\lambda\boldsymbol{M} + \mathbf{N})$

b) Sean
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+\frac{1}{\alpha} \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1+\frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Para resolver un sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se propone el método iterativo:
$$\boldsymbol{x}_{n+1} = -\boldsymbol{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_n + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{1}$$
Siendo $\mathbf{N} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{M}$. Probar que si el método (1) converge a $\boldsymbol{x}$, entonces $\boldsymbol{x}$ es solución del sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

c) Hallar todos los valores de α para los cuales el método propuesto converge.

d) ¿Qué restricción impondrían sobre α si se quiere garantizar que el error $\mathbf{e}_n = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}$ satisfaga:

$$\|\mathbf{e}_n\| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\mathbf{e}_0\|,$$

para alguna norma $\|\cdot\|$?

Ejercicio 9. Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $\boldsymbol{A}_n x = \boldsymbol{b}_n$ para

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+\frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b}_n = (1, 2-\frac{1}{n^2})^t.$$

¿Cómo es la convergencia? ¿Tiene esto que ver con el mal condicionamiento de $\boldsymbol{A}$? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

Ejercicio 10. (método SOR) Dada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U}$.

a) Demostrar que el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es equivalente al sistema
$(\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = ((1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \omega\boldsymbol{b}$, cualquiera sea $\omega \neq 0$.

b) Considere el método iterativo $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{B}(\omega)\boldsymbol{x}^k + c$ con

$$\boldsymbol{B}(\omega) = (\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{U}).$$

Probar que $\det(\boldsymbol{B}(\omega)) = (1-\omega)^n$ y concluir que si el método converge $\Rightarrow \omega \in (0, 2)$.

c) Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Compare los métodos para $\omega = \frac{3}{2}$ y $\omega = 1$ ¿ Cuál elegiría y por qué ?

Ejercicio 11. Considerar la forma cuadrática $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \eta$.

a) Probar que si $\boldsymbol{x} = (x, y)^t$, entonces f puede escribirse en forma matricial como:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \eta,$$

para cierta $\boldsymbol{A}$ simétrica.

b) Probar que los puntos críticos de f son las soluciones del sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

c) Probar que f tiene un mínimo (único) si y sólo si $\boldsymbol{A}$ es definida positiva (estricta). Inversamente: f tiene un máximo (único) si y sólo si $\boldsymbol{A}$ es definida negativa.

d) Probar que si $\boldsymbol{A}$ tiene autovalores $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ entonces f tiene un punto silla (hallar una dirección en la que tenga un máximo y una dirección en la que tenga un mínimo).

e) ¿Cambia algo si la cuadrática está definida sobre n variables $x_1, \ldots, x_n$?

Ejercicio 12. Dada la analogía delineada en el ejercicio anterior, cuando $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva, tiene sentido pensar el problema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ como un problema de minimización. Los métodos de descenso toman un vector inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ y realizan la iteración: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + t^k \boldsymbol{v}^{(k)}$, donde $\boldsymbol{v}^{(k)}$ es una *dirección de descenso* elegida en cada paso y t^k es un parámetro que indica cuánto moverse lo largo de la dirección $\boldsymbol{v}^{(k)}$.

a) Probar que la dirección de máximo descenso de una función f en un punto $\boldsymbol{x}^{(0)}$ está dada por: $-\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)})$.
Sug.: recordar la derivada direccional de f en la dirección de $\boldsymbol{v}$ puede calcularse como $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}$.

b) Mostrar que para una función cuadrática como la del ejercicio anterior el gradiente negativo es el residuo: $-\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}$.

c) El método del gradiente es un método de descenso en el que se elige como dirección de descenso el gradiente negativo: $\boldsymbol{v}^{(k)} = -\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) = \mathbf{r}^{(k)}$. Probar que para f cuadrática, la función $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}^{(k)} + t\mathbf{r}^{(k)})$ alcanza un mínimo en $t = \frac{\mathbf{r}^{(k)t}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)t}\boldsymbol{A}\mathbf{r}^{(k)}}$. [Obs.: la función φ es la cuadrática restringida a la recta con vector director $\mathbf{r}^{(k)}$ que pasa por $\boldsymbol{x}^{(k)}$].

Ejercicio 13. En el contexto del Ejercicio 12, mostrar que si la función φ se define como $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}^{(k)} + t\mathbf{d}^{(k)})$, donde $\mathbf{d}^{(k)}$ es una dirección cualquiera, entonces el mínimo de φ se alcanza en $t = \frac{\mathbf{r}^{(k)t}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)t}\boldsymbol{A}\mathbf{d}^{(k)}}$.

Ejercicio 14. Implementar el método del gradiente descripto en el Ejercicio 12, eligiendo en cada paso el valor de t óptimo. El algoritmo debe detenerse cuando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas es menor que una tolerancia dada. Además, debe almacenar toda la sucesión de puntos generada y devolverla en forma de matriz de $N \times n$, donde n es el tamaño del problema y N el número de iteraciones realizadas.

Ejercicio 15.

a) Aplicar el método del gradiente a la resolución del sistema: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ siendo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

b) Si X es la matriz que devuelve el método (cada fila es una iteración), correr el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x     = np.linspace(0,6,100)
y     = np.linspace(-2,2,100)
xx,yy = np.meshgrid(x,y)
zz    = np.zeros(xx.shape)
for i in range(xx.shape[0]):
    for j in range(yy.shape[1]):
        vec     = np.array([xx[i,j],yy[i,j]])
        zz[i,j] = 0.5*vec@A@vec - b@vec
plt.contour(xx,yy,zz)
```

```
plt.plot(X[:,0],X[:,1],'*-')
plt.show()
```

Interpretar qué hace cada línea.

c) ¿Qué se muestra en el gráfico obtenido? ¿Qué se observa?