Álgebra Lineal Computacional

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica N° 4: Sistemas lineales.

Ejercicio 1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son diagonales, $\boldsymbol{AB}$ es diagonal.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son triangulares superiores, $\boldsymbol{AB}$ es triangular superior.

Ejercicio 2. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Escalonar la matriz $\boldsymbol{A}$ multiplicándola a izquierda por matrices elementales $\boldsymbol{T}^{ij}(a)$, $a \in \mathbb{R}$, $1 \leq i$, $j \leq 4$, con $i \neq j$.

Recordar que $\boldsymbol{T}^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ se define como:

$$\boldsymbol{T}^{ij}(a) = \boldsymbol{I}_n + a\boldsymbol{E}^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \quad a \in K,$$

siendo $\boldsymbol{E}^{ij}$ las matrices canónicas de $K^{n\times n}$.

(b) Hallar la descomposición $\boldsymbol{LU}$ de $\boldsymbol{A}$.

(c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Escribir funciones de `Python` que calculen la solución de un sistema:

(a) $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{b}$, siendo $\boldsymbol{U}$ triangular superior.

(b) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{x}$, siendo $\boldsymbol{L}$ triangular inferior.

Ejercicio 4. Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes tareas:

(a) Calcular la descomposición $\boldsymbol{LU}$ de una matriz dada $\boldsymbol{A}$, asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.

(b) Llamando a la anterior y a las del ejercicio 3, resolver un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

(c) Verificar los resultados obtenidos en el ejercicio 2.

Ejercicio 5. Considerar la matriz: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que $\boldsymbol{A}$ no admite descomposición $\boldsymbol{LU}$.

(b) Hallar la descomposición $\boldsymbol{LU}$ de $\boldsymbol{PA}$ para alguna matriz de permutación $\boldsymbol{P}$ adecuada.

Recordar que las matrices de permutación $\boldsymbol{P}^{ij} \in K^{n\times n}$ se definen como:

$$\boldsymbol{P}^{ij} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{E}^{ii} - \boldsymbol{E}^{jj} + \boldsymbol{E}^{ij} + \boldsymbol{E}^{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j,$$

siendo $\boldsymbol{E}^{ij}$ las matrices canónicas de $K^{n\times n}$.

Ejercicio 6. Se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{cases} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{cases}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

(a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

(b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

Ejercicio 7. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que A es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

Ejercicio 8. Sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base de K^n ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

(a) Probar que si B es ortogonal, entonces

$$\mathbf{C}_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_2^*}{\|\boldsymbol{v}_2\|_2^2} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_n^*}{\|\boldsymbol{v}_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si B es ortonormal, entonces $\mathbf{C}_{EB} = \mathbf{C}_{BE}^*$.

(c) Concluir que si B es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ en base B son:

$$(\boldsymbol{v})_B = (\boldsymbol{v}_1^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}).$$

(d) Calcular $(\boldsymbol{v})_B$ siendo $\boldsymbol{v} = (1, -i, 3)$, $B = \{(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, i)\}$.

Ejercicio 9. Aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt para calcular bases ortonormales de los subespacios generados por las siguientes bases:

(a) $B = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

(b) $B = \{(i, 1-i, 0),(i,1,0)\}$

(c) $B = \{(1,-1,0,1),(0,1,1,0),(-1,0,1,1)\}$.

Ejercicio 10.

(a) Sea $B = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0), \quad f(0,1,-1) = (0,1,-1) \quad \text{y} \quad f(0,0,1) = (0,0,0).$$

Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Nu(f) =< (1,1,1) >$ e $Im(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

(c) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$[f] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probar que f es un proyector y hallar una base $\boldsymbol{B}$ / $[f]_B$ sea diagonal.

Ejercicio 11. Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$. Probar que:

(a) La transformación lineal definida por la matriz $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\langle \boldsymbol{v} \rangle$.

(b) Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio $\mathbb{S}$, entonces: $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre $\mathbb{S}$.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es como en el ítem anterior, $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ es la proyección ortogonal sobre $\mathbb{S}^\perp$.

(d) $R = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$.

Ejercicio 12. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre el rango de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 13. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 14. Implementar dos programas que calculen la descomposición QR de una matriz:

1. Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

2. Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programas con las dadas por el comando $\mathrm{np.linalg.qr}$ ¿Qué se observa?

Ejercicio 15. Implementar un programa en `Python` que resuelva un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a partir de la descomposición QR de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 16.
Método QR: El *metódo QR* puede utilizarse para calcular la forma de Schur real de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el método consiste en generar una sucesión de matrices $\boldsymbol{A}_k$ definida del siguiente modo:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}, \quad \mathbf{Q}_k\mathbf{R}_k \text{ descomposición } QR \text{ de } \boldsymbol{A}_k \text{ y } \boldsymbol{A}_{k+1} = \mathbf{R}_k\mathbf{Q}_k.$$

(a) Probar que las matrices $\boldsymbol{A}_k$ son todas semejantes a $\boldsymbol{A}$ y por lo tanto tienen los mismos autovalores.

(b) Implementar un programa que realice la iteración del método y devuelva $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}_k$ y $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_k$

(c) Aplicar el programa a las matrices:

$$\text{(i)}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(iii)}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(iv)}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 190 & 66 & -84 & 30 \\ 66 & 303 & 42 & -36 \\ 336 & -168 & 147 & -112 \\ 30 & -36 & 28 & 291 \end{pmatrix}$$

Comparar los resultados con los arrojados por el comando $\mathrm{scipy.linalg.schur}$. Observar que en el caso de matrices simétricas, el método diagonaliza $\boldsymbol{A}$.