

ÁLGEBRA LINEAL COMPUTACIONAL

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica N° 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en \mathbb{R} o en \mathbb{C} . Si la solución es única, puede verificarse el resultado en Python utilizando el comando `np.linalg.solve`.

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 &= 2i \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 &= 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k , resolverlo.

Ejercicio 3. En Python, importar la librería numpy con el siguiente comando: `import numpy as np`, y probar los siguientes comandos:

```
import numpy as np

1 + 3
a = 7
5 b = a + 1
print("b = ", b)

# Vectores
v = np.array([1, 2, 3, -1])
10 w = np.array([2, 3, 0, 5])
print("v + w = ", v + w)
print("2*v = ", 2*v)
print("v**2 = ", v**2)

15 # Matrices (ejecutar los comandos uno a uno para ver los resultados)
A = np.array([[1, 2, 3, 4, 5], [0, 1, 2, 3, 4], [2, 3, 4, 5, 6], [0, 0, 1, 2, 3], [0, 0, 0, 0, 1]])
print(A)
A[0:2, 3:5]
A[:2, 3:]
20 A[[0, 2, 4], :]
ind = np.array([0, 2, 4])
```

```
A[ind , ind ]
A[ind , ind [: , None]]
```

```
25 # Numeros complejos
```

```
1j*1j
(1+2j)*1j
```

Ejercicio 4. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$. Verificar el resultado obtenido usando Python. Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt #libreria para graficar

# ...
5 # Aca, crear la matriz y resolver el sistema para calcular a,b y c.
# ...

xx = np.array([1,2,3])
yy = np.array([1,2,0])
10 x = np.linspace(0,4,100) #genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f = lambda t: a*t**2+b*t+c #esto genera una funcion f de t.
plt.plot(xx,yy, '*')
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
- (b) $\{A \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : A = -A^t\}$
- (c) $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : tr(A) = 0\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0, ix_1 + (1 + i)x_2 - x_3 = 0\}$

Ejercicio 6. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- i) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
- ii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.
- iii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V , y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.
- ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$
- iii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$

- iv) $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \forall i, j\}$ $T = \{(x_{ij}) / x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.
v) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \langle (i, 1, 3 - i), (4, 1 - i, 0) \rangle$ $T = \{x \in \mathbb{C}^3 : (1 - i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

Ejercicio 8. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K . Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

- i) $\{(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, -1), (0, 2, 1, -5)\}$ en \mathbb{R}^4 , para $K = \mathbb{R}$.
ii) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ en \mathbb{C}^2 , para $K = \mathbb{C}$.

Ejercicio 9. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S . Extender la base de S a una base del espacio vectorial correspondiente.

- i) $S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$
ii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 10. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

- (a) Probar que si $A \in K^{m \times n}$ satisface que $Ax = 0 \forall x \in K^n$, entonces $A = 0$. Deducir que si $A, B \in K^{m \times n}$ satisfacen que $Ax = Bx \forall x \in K^n$, entonces $A = B$.

- (b) Probar que si $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j -ésima de B , entonces $AB = (AB_1 \mid \cdots \mid AB_r)$ (es decir, AB_j es la columna j -ésima de AB).

Ejercicio 11. Sean $A, A' \in K^{m \times n}$; $B \in K^{n \times r}$; $D, D' \in K^{n \times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

- (a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$ (e) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$
(b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ (f) $tr(\alpha D) = \alpha tr(D)$
(c) $(AB)^t = B^t A^t$ (g) $tr(DD') = tr(D'D)$
(d) AA^t y $A^t A$ son matrices simétricas.

Ejercicio 12. Calcular el determinante de A en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Cuando sea posible, verificar utilizando Python, con el comando `np.linalg.inv`.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (e) A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Escribir funciones de Python que realicen las siguientes operaciones:

- (a) Calcular la traza de una matriz.
- (b) Calcular la sumatoria de todos los elementos de una matriz.