

Práctica 7

1. Sea Y un espacio métrico y sea A un conjunto. Sea $f : A \rightarrow Y$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \rightarrow Y$.

Probar que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ no converge uniformemente a f si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ de $(f_n)_{n \geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k \geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

- (a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$.
 (b) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.
 (c) $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$.

3. (a) Encontrar el límite puntual de la sucesión de funciones $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

- i. $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$;
 ii. $f_n(x) = x^{-n}e^x$, $A = (1, +\infty)$;
 iii. $f_n(x) = n^2x(1 - x^2)^n$, $A = [0, 1]$;
 iv. $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $A = \mathbb{R}$.

- (b) Para la sucesión de i., probar que la convergencia es uniforme sobre $(0, \frac{1}{2})$, y para la de ii., que es uniforme sobre $[2, 5]$.

- (c) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión sobre A en alguno de los casos?

4. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en \mathbb{R} . Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

- (a) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

- (b) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

- (c) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en X , mostrar que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ es *uniformemente acotada* o es *acotada en d_∞* .

5. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2}.$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n \geq 1}$ y $(f'_n)_{n \geq 1}$.

6. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n \geq 1}, (g_n)_{n \geq 1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ dos sucesiones de funciones que convergen uniformemente a funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que:

- (a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$.
- (b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a $f g$.

7. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Estudiar la continuidad uniforme de f .

8. Sea $(f_n)_{n \geq 1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables que converge puntualmente a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que si existe $c > 0$ tal que $|f'_n(x)| \leq c$ para todo $x \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.

9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X a \mathbb{R} tal que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformemente en X . Probar que:

- (a) La función suma $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ es continua en X .
- (b) Si $X = [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx$.

10. Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces las dos series de funciones

$$\sum_{n \geq 1} a_n \cos nx \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$$

convergen absoluta y uniformemente en \mathbb{R} a funciones continuas.

11. Probar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sin(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

y la serie converge absoluta y uniformemente en todo intervalo acotado. ¿Qué sucede en \mathbb{R} ?

Sugerencia: $y(x) = \sin(x)$ es la única función $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable que satisface $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

12. Probar que la serie

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$$

define una función continua en $(0, +\infty)$.

Probar que además f es derivable, y calcular su derivada.

13. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ la sucesión del Ejercicio 3(a)iv. Probar que la serie de término general f_n converge uniformemente en cualquier intervalo de la forma de $[a, +\infty)$ con $a > 0$, pero no en $(0, +\infty)$.