Práctica 6: Extensiones inseparables - Norma y traza

1 Sean E/K una extensión algebraica y $\alpha \in E$. Probar que todas las raíces de $m(\alpha, K)$ en $\overline{K}$ tienen la misma multiplicidad.

2 Sea E/K una extensión algebraica finitamente generada. Probar que son equivalentes:

(i) E/K es separable.

(ii) La cantidad de morfismos de extensiones $\sigma : E/K \to \overline{K}/K$ coincide con $[E:K]$.

Nota. Ya probaron una implicación en la práctica 4, lo que falta sale usando el mismo argumento.

3 Sea E/K una extensión de cuerpos.

(a) Sea $S \subseteq E$ un subconjunto (no necesariamente finito) tal que todo elemento de S es separable sobre K. Probar que $K(S)/K$ es una extensión separable.

(b) Deducir que $E_s = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ es separable sobre } K\}$ es un subcuerpo de E.

4 Sean E/F y F/K dos extensiones de cuerpos. Probar que

$$E/K \text{ es separable} \iff E/F \text{ y } F/K \text{ son separables.}$$

5 Sean E/K y F/K dos extensiones de cuerpos.

(a) Probar que si E/K es separable entonces EF/F también lo es.

(b) Deducir que si E/K y F/K son ambas separables entonces EF/K también lo es.

6 Sean E/K una extensión separable de grado n y $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ los elementos de $\mathrm{Hom}(E/K, \overline{K}/K)$. Supongamos además que $E = K(a, b)$ para ciertos $a, b \in E$.

(a) Supongamos que existe $c \in K$ tal que $\sigma_i(a + cb) \neq \sigma_j(a + cb)$ para todos $i \neq j$. Probar que entonces $E = K(a + cb)$.

(b) Observar que c cumple la condición anterior si y sólo si c no es raíz del polinomio

$$h(X) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left[\big(\sigma_i(b) - \sigma_j(b)\big) X + \big(\sigma_i(a) - \sigma_j(a)\big) \right].$$

7 Probar el ***Teorema del Elemento Primitivo***: si E/K es una extensión finita y separable, entonces existe $\alpha \in E$ tal que $E = K(\alpha)$.

Sugerencia. Si K es finito ya lo sabemos (¿por qué?). Para K infinito, usar el ejercicio anterior y hacer inducción en la cantidad de generadores.

8 Sea E/K una extensión separable (en principio, no suponemos que sea finita) tal que para todo $\alpha \in E$ vale que el grado de $m(\alpha, K)$ es menor o igual que d. Probar que entonces $[E:K] \le d$.

En los siguientes ejercicios, sea K un cuerpo de característica p. Recordemos que una extensión algebraica E/K se dice **puramente inseparable** si se cumplen las siguientes propiedades (vimos en clase que son equivalentes):

- Los únicos elementos de E que son separables sobre K son los de K.
- Para todo $\alpha \in E$ existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $\alpha^{p^m} \in K$. *(Cuando esto ocurre se dice que el elemento α es puramente inseparable sobre K.)*
- Si $\overline{K}$ es una clausura algebraica de K que contiene a E, entonces el único morfismo de extensiones $\sigma : E/K \to \overline{K}/K$ es la inclusión.

9 (*a*) Probar que E/E_s es una extensión puramente inseparable.

(*b*) Probar que si F/K es una subextensión tal que E/F es puramente inseparable y F/K es separable, entonces $F = E_s$.

10 (*a*) Probar que si E/K es puramente inseparable y finitamente generada entonces $[E:K]$ es una potencia de p.

(*b*) Deducir que en ese caso para todo $\alpha \in E$ se tiene que $\alpha^{[E:K]} \in K$.

(*c*) Deducir que si $[E:K]$ no es divisible por p entonces E/K es separable.

11 (*a*) Probar que una extensión generada por elementos puramente inseparables es puramente inseparable.

(*b*) Sean E/F y F/K dos extensiones de cuerpos. Probar que E/K es puramente inseparable si y sólo si E/F y F/K lo son.

(*c*) Sean E/K y F/K dos extensiones de cuerpos. Probar que si E/K es puramente inseparable entonces EF/F también lo es.

12 Sea E/K una extensión algebraica y sea $E_i = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ es puramente inseparable sobre } K\}$.

(*a*) Probar que E_i es un subcuerpo de E.

(*b*) Probar que $E_s \cap E_i = K$.

(*c*) Probar que si E/K es normal, entonces E/E_i es separable y $E_sE_i = E$.

13 Sean $K = \mathbb{F}_2(u,v)$ con $\{u,v\}$ algebraicamente independiente sobre $\mathbb{F}_2$, $\alpha \in \overline{K}$ una raíz del polinomio $X^2 + X + u$, $\beta \in \overline{K}$ una raíz cuadrada de αv, y $E = K(\beta)$.

(*a*) Probar que $[E:K] = 4$ y calcular E_s.

(*b*) Probar que si $\gamma \in E$ es tal que $\gamma^2 \in K$, entonces $\gamma \in K$.

Sugerencia. Notar que $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ es una base de E como K-espacio vectorial. Escribir γ como combinación lineal de estos elementos, elevar al cuadrado y usar que $\alpha \notin K$ para forzar que cierto coeficiente sea 0.

(*c*) Concluir que $E_i = K$, y entonces no valen las conclusiones de (c) del ejercicio anterior sin la hipótesis de normalidad.

14 Un cuerpo K se dice *perfecto* si toda extensión algebraica E/K es separable. Por ejemplo, los cuerpos de característica cero y los cuerpos finitos son perfectos.

Probar que un cuerpo K de característica p es perfecto si y sólo si $K^p = K$.

15 Calcular la norma y la traza de $\sqrt[3]{2}$ en $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, \xi_3\right)/\mathbb{Q}$.

16 Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Calcular la norma y la traza de los elementos ξ_p y $1-\xi_p$ en la extensión $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$.

17 Sea $f \in K[X]$ un polinomio irreducible y separable de grado n y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de f. Probar que para todo $c \in K$, $N_{K(\alpha)/K}(\alpha - c) = (-1)^n f(c)$.

18 Sea $n > 1$. Probar que el polinomio $X^n - \left(1+\sqrt[3]{2}\right)$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

19 Sea $S = \left\{ \sqrt[n]{p} \;\middle|\; p \text{ primo}, n \geq 2 \right\}$. Probar que para todo $A \subseteq S$ finito y no vacío, la suma de los elementos de A es irracional.

20 Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{2}\right)$. Probar que las únicas subextensiones de $E/\mathbb{Q}$ son las de la forma $\mathbb{Q}\left(\sqrt[d]{2}\right)/\mathbb{Q}$ con d divisor de n.

Sugerencia. Sea $F/\mathbb{Q}$ una subextensión de grado d. Calcular $N_{E/F}\left(\sqrt[n]{2}\right)$.

21 Sea $f \in K[X]$ un polinomio mónico, irreducible y separable de grado n. Recordemos que el *discriminante* de f se define como

$$\Delta(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$ son las raíces de f. Probar que si α es cualquier raíz de f, entonces vale la igualdad

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot N_{K(\alpha)/K}\left(f'(\alpha)\right).$$

22 Sea p un número primo. Probar que la ecuación $a^3 + pb^3 + p^2c^3 - 3pabc = 0$ no tiene soluciones racionales no triviales (es decir, la única solución con a, b, c racionales es $(0,0,0)$).