Práctica 3: Morfismos - Extensiones normales

Dadas dos extensiones E/K y F/K, un **morfismo de extensiones** $\sigma : E/K \to F/K$ es un morfismo de cuerpos de E en F tal que $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$.

$\boxed{1}$ Probar que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.

$\boxed{2}$ Sean $\sigma : E/K \to F/K$ un morfismo de extensiones y $f \in K[X]$ un polinomio.

- (a) Probar que para todo $\alpha \in E$ se cumple que $\sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$.
- (b) Deducir que si α es algebraico sobre K entonces $\sigma(\alpha)$ es raíz de $m(\alpha, K)$.

$\boxed{3}$ Sea E/K una extensión **algebraica** (no necesariamente finita). Probar que todo endomorfismo $\sigma : E/K \to E/K$ es un automorfismo.

Sugerencia. Dado $\beta \in E$, considerar el conjunto $A = \{\alpha \in E : \alpha \text{ es raíz de } m(\beta, K)\}$. ¿Cómo actúa σ sobre los elementos de A?

$\boxed{4}$ Sea E/K una extensión y sean $\alpha, \beta \in E$ dos raíces de un polinomio irreducible $f \in K[X]$. Probar que existe un único morfismo de extensiones $\sigma : K(\alpha)/K \to K(\beta)/K$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta$.

Sugerencia. Usar que $K(\alpha) \cong K[X]/\langle f \rangle$ y las propiedades universales que correspondan.

De aquí en adelante, salvo que se aclare lo contrario, ξ_n siempre denota una raíz n-ésima primitiva de la unidad (en $\mathbb{C}$).

$\boxed{5}$ En cada uno de los siguientes casos, calcular el cardinal del conjunto $\mathrm{Hom}(E/K, F/K)$ y describir sus elementos:

- (a) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, $F = \mathbb{C}$
- (b) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, $F = \mathbb{R}$
- (c) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\xi_n)$, $F = \mathbb{C}$
- (d) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\xi_n)$, $F = \mathbb{Q}(\xi_n)$
- (e) $K = \mathbb{Q}(i)$, $E = \mathbb{Q}(\xi_8)$, $F = \mathbb{C}$
- (f) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt[12]{3})$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$
- (g) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt[12]{3})$
- (h) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$
- (i) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$, $F = \mathbb{C}$
- (j) $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$

$\boxed{6}$ Sean E/K y F/K dos extensiones, $\tau : K \to F$ un morfismo de cuerpos cualquiera (no necesariamente la inclusión), y $\alpha \in E$ un elemento algebraico sobre K.

- (a) Dar una condición necesaria y suficiente para que se pueda extender τ a un morfismo $\widetilde{\tau} : K(\alpha) \to F$.
- (b) Probar que si E/K es algebraica y *finitamente generada* y F es algebraicamente cerrado, entonces τ se puede extender a E.

$\boxed{7}$ Probar que (usando el axioma de elección) la hipótesis de "finitamente generada" en el ejercicio anterior no es necesaria. Es decir: si E/K es una extensión algebraica y F es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces todo morfismo de cuerpos $\tau : K \to F$ se puede extender a un morfismo $\widetilde{\tau} : E \to F$.

Sugerencia. Usar el lema de Zorn con el conjunto de los pares (E', τ') donde E'/K es una subextensión de E/K y $\tau' : E' \to F$ es un morfismo que extiende a τ.

8 Sea E/K una extensión algebraica y sea $\overline{K}$ una clausura algebraica de K que contiene a E. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo polinomio irreducible en $K[X]$ que tiene por lo menos una raíz en E se factoriza linealmente en $E[X]$ (es decir, si una raíz está en E entonces *todas* lo están).

(ii) Todo morfismo de extensiones $\sigma : E/K \to \overline{K}/K$ cumple que $\sigma(E) \subseteq E$.

Si se satisface alguna (y por lo tanto ambas) de estas condiciones, decimos que E/K es una extensión **normal**.

9 Sean E/F y F/K dos extensiones de cuerpos.

(a) Probar que si E/K es normal entonces E/F también lo es, pero F/K puede no serlo.

(b) Probar que E/F y F/K normales no implica que E/K sea normal.

Ahora sean E/K y F/K dos extensiones de cuerpos.

(c) Probar que si E/K es normal entonces EF/F también lo es.

(d) Probar que si E/K y F/K son normales entonces EF/K también lo es.

(e) Probar que si E/K y F/K son normales entonces $E \cap F/K$ también lo es.

10 ¿Cuáles de las extensiones E/K que aparecen en el ejercicio **5** son normales?

11 Dada una familia de polinomios $\{f_i\}_{i\in I}$ en $K[X]$, decimos que una extensión E/K es un **cuerpo de descomposición** de los f_i si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Todos los f_i se factorizan linealmente en $E[X]$.
- Si $F \subseteq E$ es un subcuerpo tal que todos los f_i se factorizan linealmente en $F[X]$, entonces $F = E$.

(a) Probar que si E/K es un cuerpo de descomposición de la familia $\{f_i\}_{i\in I} \subset K[X]$ entonces $E = K(S)$ donde todo elemento de S es raíz de algún f_i.

(b) Probar que una extensión algebraica E/K es normal si y sólo si es el cuerpo de descomposición de una familia de polinomios de $K[X]$.

12 Sea $E = K(S)$ donde todo elemento $\alpha \in S$ cumple que $m(\alpha, K)$ tiene grado 2. Probar que la extensión E/K es normal.

13 En cada uno de los siguientes casos, calcular el grado de E/K donde E es un cuerpo de descomposición de f sobre K. (Para eso, seguramente necesiten antes encontrar un sistema de generadores conveniente.)

(a) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^n - 1$

(b) $K = \mathbb{R}$, $f = X^n - 1$ con $n > 2$

(c) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^4 - 2$

(d) $K = \mathbb{Q}(i)$, $f = X^4 - 3$

(e) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^5 + X^3 - 2X^2 - 2$

(f) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^3 + 6X + 3$

(g) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^p - 5$ con p primo

(h) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^4 + 2$

(i) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^4 - 10X^2 + 5$

(j) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^6 - 4X^3 + 1$

Sugerencia. Algunos de estos polinomios ya aparecieron antes en las guías.

14 Determinar todos los pares (m,n) de números naturales tales que la extensión $\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{m}\right)/\mathbb{Q}$ es normal.

15 Sean E/K una extensión normal y $f \in K[X]$ un polinomio irreducible. Probar que todos los factores irreducibles de f en $E[X]$ tienen el mismo grado.

16 Este ejercicio da otra manera de acotar la cantidad de morfismos de una extensión a partir de su grado.

Sean E y F dos cuerpos y sean $\sigma_1,\dots,\sigma_n : E \to F$ morfismos distintos.

(a) Probar que el conjunto $\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$ es linealmente independiente sobre F.[1]

Sugerencia. Por el absurdo: tomar un subconjunto LD *minimal*, sin pérdida de generalidad podemos suponer que es $\{\sigma_1,\dots,\sigma_r\}$. Usando un elemento $z \in E$ tal que $\sigma_1(z) \neq \sigma_2(z)$, conseguir una combinación lineal no trivial de $\{\sigma_2,\dots,\sigma_r\}$ que valga 0.

(b) Deducir que si E/K y F/K son dos extensiones, con E/K finita, entonces

$$\#\mathrm{Hom}(E/K, F/K) \leq [E:K].$$

[1]En realidad, este teorema vale para G cualquier grupo abeliano y los $\sigma_i : G \to F^\times$ morfismos de grupos, a veces llamados **caracteres**. No se usa la estructura aditiva de E.