

**Topología**  
Segundo cuatrimestre - 2021  
Práctica 1  
**Espacios Topológicos**

---

## Ejemplos

1. Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $Y \subseteq X$ . Muestre que

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es una topología sobre  $Y$ . Llamamos a  $\tau_Y$  la *topología inducida* por  $\tau$  sobre  $Y$  o la *topología subespacio*.

2. Sean  $X$  un conjunto infinito,  $x_0 \in X$  y  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  el conjunto de las partes de  $X$  que tienen complemento finito o que no contienen a  $x_0$ . Muestre que  $\tau$  es una topología y describa sus cerrados.
3. Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todos los cerrados acotados de  $\mathbb{R}$  en su topología usual, junto con  $\mathbb{R}$ . Pruebe que existe una topología en  $\mathbb{R}$  para la cual  $\mathcal{F}$  es el conjunto de todos los cerrados.
4. Decimos que un subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  es *radialmente abierto* si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de  $\mathbb{R}^2$  es una topología sobre  $\mathbb{R}^2$  y compárela con la topología usual.

## Construcción de topologías

5. Sea  $X$  un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos*  $\mathcal{F}$  en  $X$  es una regla que a cada elemento  $x \in X$  asigna una familia  $\mathcal{F}_x \in \mathcal{P}(X)$  de manera que

(A1) si  $x \in X$ ,  $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$ ;

(A2) si  $x \in X$  y  $A \in \mathcal{F}_x$ , entonces  $x \in A$ ;

(A3) si  $x \in X$ ,  $A \in \mathcal{F}_x$  y  $B \in \mathcal{P}(X)$  son tales que  $A \subseteq B$ , entonces  $B \in \mathcal{F}_x$ ;

(A4) si  $x \in X$  y  $A, B \in \mathcal{F}_x$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{F}_x$ ;

(A5) si  $x \in X$  y  $A \in \mathcal{F}_x$ , entonces existe  $B \in \mathcal{F}_x$  tal que  $B \subseteq A$  y  $B \in \mathcal{F}_y$  para todo  $y \in B$ .

Pruebe que:

- a) Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico y para cada  $x \in X$  definimos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$

entonces  $\mathcal{F}$  es un sistema de filtros de entornos en  $X$ .

- b) Si  $\mathcal{F}$  es un sistema de filtros de entornos en  $X$  y definimos

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\emptyset\},$$

entonces  $\tau$  es una topología sobre  $X$ .

- c) Las construcciones de los items a) y b) son inversas.

6. Sea  $X$  un conjunto. Una función  $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  es un *operador de clausura en  $X$*  si

(C1)  $c(\emptyset) = \emptyset$ ;

(C2) si  $A \in \mathcal{P}(X)$ , entonces  $A \subseteq c(A)$ ;

(C3) si  $A \in \mathcal{P}(X)$ , entonces  $c(c(A)) = c(A)$ ;

(C4) si  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ , entonces  $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$ ;

Pruebe que

a) Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico, entonces la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \bar{A} \in \mathcal{P}(X)$$

es un operador de clausura en  $X$ .

b) Si  $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  es un operador de clausura en  $X$ , entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una topología sobre  $X$ .

c) Las construcciones de los items a) y b) son inversas.

7. Sea  $X$  un conjunto y sea  $B \subseteq X$ . Pruebe que la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

es un operador de clausura en  $X$ . Describa los abiertos de la topología correspondiente.

## Clausura, interior, frontera

8. Sea  $X$  un espacio topológico y sean  $A, B \subseteq X$ . Pruebe las siguientes inclusiones y decida cuáles pueden ser estrictas:

a)  $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ ;

b)  $A \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$  cuando  $A$  es abierto;

c)  $\overline{A \setminus B} \subseteq \bar{A} \setminus \bar{B}$ ;

d)  $\bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}$ ;

e)  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\circ} \subseteq (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)^{\circ}$  y

f)  $(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)^{\circ} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{\circ}$ .

9. Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A \subseteq X$ . Pruebe que:

a)  $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} = \bar{A} \setminus A^{\circ}$ ;

b)  $X \setminus \partial A = A^{\circ} \cup (X \setminus A)^{\circ}$ ;

c)  $\bar{A} = A \cup \partial A$ ;

d)  $A^{\circ} = A \setminus \partial A$ ;

e)  $A$  es abierto sii  $A \cap \partial A = \emptyset$  y

f)  $A$  es cerrado sii  $\partial A \subseteq A$ .

10. *Topología del complemento finito.* Sea  $X$  un conjunto y sea  $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ . Pruebe que  $\tau$  es una topología sobre  $X$ . Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de  $X$  con respecto a esta topología.
11. Sean  $X$  un conjunto no vacío y  $x_0 \in X$ . Pruebe que:
- $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$  es una topología sobre  $X$ .
  - $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$  es una topología sobre  $X$ .
- Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de  $X$  con respecto a cada una de estas topologías.
12. *El cuadrado ordenado.* Considere el conjunto  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de  $X$ :
- $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ ,
  - $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$ ,
  - $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$ ,
  - $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$ ,
  - $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$ .
13. Pruebe que todo cerrado de  $\mathbb{R}^2$  es la frontera de un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

## Bases y sub-bases

14. Sea  $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una colección de topologías en  $X$ . Pruebe que  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$  es una topología en  $X$ . ¿Es  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$  una topología en  $X$ ?
15. Sean  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Pruebe que existe una topología  $\sigma(\mathcal{A})$  sobre  $X$  tal que
- todo elemento de  $\mathcal{A}$  es abierto para  $\sigma(\mathcal{A})$ , y
  - si  $\tau$  es una topología sobre  $X$  tal que todo elemento de  $\mathcal{A}$  es abierto para  $\tau$ , entonces  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$ .
- En otras palabras,  $\sigma(\mathcal{A})$  es la topología menos fina que contiene a  $\mathcal{A}$  (la mínima en el orden dado por la inclusión). La topología  $\sigma(\mathcal{A})$  es la *topología generada* por  $\mathcal{A}$ .
- Describa la topología generada por  $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$  sobre el conjunto  $X = \{a, b, c, d\}$ .
16. Sea  $(X, <)$  un conjunto ordenado. Consideremos  $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$  y  $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$ , donde  $R_x = \{y \in Y : x < y\}$ . Pruebe que  $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$  es una sub-base para la topología del orden.
17. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :
- $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ,
  - $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ,
  - $\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ,
  - $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}$ , donde  $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
  - $\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ ,
  - $\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ ,
  - $\mathcal{B}_7 = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}$ .

- a) Muestre que cada uno de  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_7$  es una base para una topología en  $\mathbb{R}$  y compare las topologías correspondientes.
- b) Muestre que  $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$  es una sub-base para la topología generada por  $\mathcal{B}_1$ .
- c) Determine la clausura del conjunto  $K$  en cada una de las siete topologías.
18. Sea  $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Muestre que  $\mathcal{B}$  es base de una topología sobre  $\mathbb{R}$ . Describa el interior de los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  con respecto a ella.
19. *Topología Zariski*. Considere  $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios en  $n$  variables sobre un cuerpo  $k$ . Para cada subconjunto  $S \subseteq k[x]$ , se define el *conjunto algebraico* dado por  $S$  como

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in k^n : p(z_1, \dots, z_n) = 0, \forall p \in S\}.$$

Verifique las siguientes propiedades:

- a)  $V(S) = V(I_S)$ , donde  $I_S$  es el ideal generado por  $S$ .
- b)  $V(\{0\}) = k^n$  y  $V(\{1\}) = \emptyset$ . Si  $S \subseteq T$ , entonces  $V(S) \supseteq V(T)$ .
- c) Si  $I, J \subseteq k[x]$  son ideales, entonces  $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$ .
- d) Si  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es una familia de ideales, entonces  $V(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(I_\alpha)$ .  
Los items b), c) y d) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la *topología Zariski* de  $k^n$ .
- e) Los conjuntos  $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$  forman una base de dicha topología.
- f) La topología Zariski en  $k$  es igual a la topología del complemento finito.

## Redes

20. Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Pruebe que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:
- a) Si  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  es eventualmente constante, entonces  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a la constante.
- b) Si  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x$ , entonces toda sub-red de  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x$ .
- c) Si  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a  $x$ , entonces  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x$ .
- d) Sean  $\Lambda$  un conjunto dirigido, y para cada  $\alpha \in \Lambda$  sea  $\Gamma_\alpha$  un conjunto dirigido. Supongamos que para cada  $\alpha \in \Lambda$  se tiene una red  $(x_k^\alpha)_{k \in \Gamma_\alpha}$  que converge a  $x^\alpha \in X$ , y que además  $(x^\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x \in X$ . Considere  $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$  ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red  $(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$  converge a  $x$ .

21. Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Pruebe que

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq A \text{ tal que } x_\alpha \rightarrow x\}.$$

22. Si  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  es una red, decimos que  $x \in X$  es un *punto de acumulación* de la red si para todo  $A \in \mathcal{F}_x$ , el conjunto  $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$  es cofinal en  $\Lambda$ . Pruebe que  $x$  es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  que converge a  $x$ .

*Sugerencia: para probar  $\Rightarrow$ , considere como conjunto dirigido el formado por los pares  $(\alpha, U)$  con  $\alpha \in \Lambda$  y  $U$  un entorno (abierto) de  $x$  que contiene a  $x_\alpha$ .*

## Funciones continuas

23. Sean  $X, Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Pruebe que cada una de las siguientes condiciones sobre  $f$  es equivalente a que  $f$  sea continua:

- Para todo  $x \in X$  y para todo  $A \in \mathcal{F}_y$  ( $y = f(x)$ ) existe  $B \in \mathcal{F}_x$  tal que  $f(B) \subseteq A$ .
- Para toda red  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq X$  tal que  $x_\alpha \rightarrow x$  se tiene que  $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ .
- Para todo  $A \subseteq X$  se tiene  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .
- Si  $\mathcal{B}$  es una base para la topología de  $Y$ , entonces  $f^{-1}(B)$  es abierto en  $X$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ .
- Si  $\mathcal{S}$  es una sub-base para la topología de  $Y$ ,  $f^{-1}(S)$  es abierto en  $X$  para todo  $S \in \mathcal{S}$ .

24. Sean  $X$  un espacio topológico y  $E \subseteq X$ . Sea  $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$  la función característica de  $E$ , esto es,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Pruebe que  $\chi_E$  es continua en  $x$  si y sólo si  $x$  no pertenece a la frontera de  $E$ .

25. a) Sean  $X, Y$  conjuntos ordenados con la topología del orden. Pruebe que si  $f : X \rightarrow Y$  es biyectiva y preserva el orden, entonces  $f$  es un homeomorfismo.
- b) Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $g(x) = \sqrt[n]{x}$ . Pruebe que  $g$  es un homeomorfismo.
- c) Sea  $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$  con la topología euclídea. Definimos  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Pruebe que  $f$  es biyectiva y preserva el orden. ¿Es  $f$  un homeomorfismo?

26. Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  una colección de subconjuntos del espacio  $X$  tal que  $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$

y supongamos que  $f|_{A_\alpha}$  es continua para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

- Pruebe que si cada  $A_\alpha$  es abierto, entonces  $f$  es continua.
- Pruebe que si  $\mathcal{A}$  es finito y cada conjunto  $A_\alpha$  es cerrado, entonces  $f$  es continua.
- Encuentre un ejemplo donde la colección  $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ , cada  $A_\alpha$  es cerrado, pero  $f$  no es continua.
- Una familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  se dice localmente finita si para cada  $x \in X$  existe un abierto  $U \subseteq X$ ,  $x \in U$ , tal que  $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$  sólo para finitos valores de  $\alpha$ . Muestre que si la familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  es localmente finita y cada  $A_\alpha$  es cerrado, entonces  $f$  es continua.

27. Sea  $Y$  un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones continuas.

- Pruebe que el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$  es cerrado en  $X$ .
- Sea  $h : X \rightarrow Y$  la función  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ . Pruebe que  $h$  es continua.