Ecuaciones Diferenciales A/B – 2° cuatrimestre 2020

Soluciones débiles

Ejercicio 1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico definido por:

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u,$$

donde $a_{ij} \in L^\infty(U)$ para $i, j = 1, \ldots, n$, $c \in L^\infty(U)$ y existen $\lambda, \Lambda > 0$ tales que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \qquad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{y todo} \quad x \in U.$$

Probar que existe una constante $\alpha > 0$ tal que la forma bilineal asociada a $\mathcal{L}$ en $H^1(U)$ satisface las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram si $c \geq -\alpha$ en U.

Ejercicio 2. Considerar el siguiente problema para el operador *bilaplaciano*:

$$\Delta^2 u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{1}$$

donde $f \in C(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1. La notación Δ^2 significa $\Delta(\Delta u)$.

1. Demostrar que $u \in C^4(U) \cap C^1(\bar{U})$ es solución de (1) si y sólo si es solución de la siguiente formulación débil para (1):

   Hallar $u \in H_0^2(U)$ *tal que* $\int_U \Delta u \Delta v \, dx = \int_U f v \, dx$ *para toda* $v \in H_0^2(U)$,

   donde $f \in L^2(U)$.
2. Demostrar que (1) admite una única solución débil.

Ejercicio 3. Considerar el siguiente problema de Neumann:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{2}$$

donde $f \in C(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1.

1. Probar que $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ es solución de (2) si y sólo si es solución de la siguiente formulación débil de (2):

   Hallar $u \in H^1(U)$ *tal que* $\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_U uv \, dx = \int_U f v \, dx$ *para toda* $v \in H^1(U)$,

   donde $f \in L^2(U)$.
2. Demostrar que (2) admite una única solución débil.

Ejercicio 4. Considerar el siguiente problema de Neumann:

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{3}$$

donde $f \in C(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1.

1. Deducir la formulación débil para (3) sobre el espacio $V = \{u \in H^1(U) : \int_U u \, dx = 0\}$ y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_U f \, dx = 0$.
2. Demostrar que si $f \in L^2(U)$ verifica $\int_U f \, dx = 0$, entonces existe una única solución débil de (2) en V. Más aún, dicha solución es única en $H^1(U)$, salvo constante.

Ejercicio 5 (Principio débil del máximo)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico definido por:

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u),$$

donde $a_{ij} \in L^\infty(U)$ para $i, j = 1, \ldots, n$ y existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{y todo} \quad x \in U.$$

Se dice que $u \in H^1(U)$ verifica $\mathcal{L}u \leq 0$ en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si:

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v \, dx \leq 0 \qquad\qquad \forall\, v \in H_0^1(U),\ v \geq 0.$$

1. Verificar que $u \in C^2(U)$ es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si y sólo si $\mathcal{L}u \leq 0$.
2. Probar que si u es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ y $u^+ \in H_0^1(U)$ (es decir $u \leq 0$ en ∂U), entonces $u \leq 0$ en U.

Ejercicio 6. Considerar el siguiente problema de autovalores:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{en} \quad U, \qquad\qquad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U,$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1. Probar que existe una sucesión de autovalores $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, asociados a autofunciones $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(U)$, tales que

1. $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},\, k \geq 2.$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$
3. u_1 es constante.
4. $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de $L^2(U)$ y base ortogonal de $H^1(U)$.

Ejercicio 7 (Principio del anti-máximo)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $u \in H_0^1(U)$ una solución débil de:

$$-\Delta u - \lambda u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U,$$

donde $f \in L^2(U)$. Verificar que si $\lambda > \lambda_1$ y $f \geq 0$ entonces u cambia de signo en U, siendo λ_1 el primer autovalor de $-\Delta$ en U.

Ejercicio 8. Sea $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa tal que $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$.

1. Probar que si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión acotada, entonces existen una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tales que
$$f_{k_j} \to f \qquad \text{en} \quad L^2(B_r(0)) \qquad \text{para todo} \quad r > 0.$$
2. Probar que si, además, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en $L_V^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f_{k_j} \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, donde $L_V^2(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones medibles $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $\int_{\mathbb{R}^n} V u^2 \, dx < \infty$, con la norma $\|u\|_{L_V^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} V u^2 \, dx$.
3. Concluir que el espacio $H = H^1(\mathbb{R}^n) \cap L_V^2(\mathbb{R}^n)$, con la norma $\|u\| = (\|u\|^2_{L_V^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2}$, verifica $H \subset\subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Es decir, toda sucesión acotada en H tiene una subsucesión convergente en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

4. Probar que existe una sucesión de autovalores $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ asociados a autofunciones $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ de la ecuación de la ecuación de Schröedinger:
$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n,$$
tales que:
   a) $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},\, k \geq 2.$
   b) $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$,
   c) $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L^2(U)$.

Ejercicio 9 (Alternativa de Fredholm para operadores simétricos)**.** El objetivo de este ejercicio es dar una demostración del teorema de la alternativa de Fredholm para operadores simétricos, en base al teorema de diagonalización de operadores elípticos simétricos.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico dado por:
$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u,$$
donde $a_{ij}, c \in L^\infty(U)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$ y la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$ es definida positiva para cada $x \in U$.

Sea $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de autovalores de $\mathcal{L}$, asociada a autofunciones $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(U)$ que forman una base ortonormal de $L^2(U)$, y sean $f \in L^2(U)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Probar que si $\lambda \neq \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces el problema
$$\mathcal{L}u - \lambda u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{4}$$
admite una única solución.
2. Probar que si $\lambda_{k-1} < \lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+l-1} < \lambda_{k+l}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces el problema (4) admite una solución si y sólo si $(f, w_j) = 0$ para todo $j = k, \dots, k+l-1$, donde $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ denota el producto interno usual en $L^2(U)$.

Ejercicio 10. Considerar el problema:
$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{5}$$
donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1. La siguiente es una estrategia para construir una solución aproximada de (5): Se considera un subespacio de dimensión finita $V \subset H_0^1(U)$, $V = \text{gen}\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$, y se define la *solución aproximada* $\tilde{u} \in V$ como la solución del siguiente problema aproximado:

Hallar $u \in V$ tal que $\displaystyle\int_U \nabla u \cdot \nabla \phi_i \, dx = \int_U f\phi_i \, dx$ para todo $i = 1, \dots, n$,
donde $f \in L^2(U)$.

1. Probar que $\tilde{u}$ está bien definida, es decir, que existe una única solución del problema aproximado.
2. Probar que se tiene la siguiente estimación de error:
$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(U)} \leq C \inf_{v\in V} \|u - v\|_{H_0^1(U)},$$
donde $C > 0$ es una constante que depende únicamente de V. Este resultado se conoce como Lema de Céa y establece que la estrategia de aproximación propuesta da como resultado la *mejor aproximación* que permite el subespacio V.

Ejercicio 11. Considerar el siguiente problema para el operador *p-Laplaciano*:
$$-\Delta_p u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{6}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1, $1 < p < \infty$ y $f \in C(U)$. El operador *p-Laplaciano* está definido como $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ (notar que $\Delta_p = \Delta$ si $p = 2$).

1. Probar que $u \in C_0^2(U)$ es solución de (6) si y sólo si es solución de la siguiente formulación débil para (6):

   Hallar $u \in W_0^{1,p}(U)$ *tal que* $\displaystyle\int_U |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_U f v \, dx$ *para toda* $v \in W_0^{1,p}(U)$,

   donde $f \in L^{p'}(U)$,

   siendo p' el exponente conjugado de p.
2. Probar que $u \in W_0^{1,p}(U)$ es solución débil de (6) si y sólo si u minimiza el siguiente funcional:
$$\Psi \colon W_0^{1,p}(U) \to \mathbb{R}, \qquad \Psi(u) = \frac{1}{p}\int_U |\nabla u|^p \, dx - \int_U f u \, dx.$$
3. Verificar que Ψ es estríctamente convexo y deducir que Ψ tiene a lo sumo un mínimo. Concluir que (6) tiene a lo sumo una solución débil.
4. (Este ítem es sólo para quienes tengan conocimiento sobre topologías débiles) Probar que Ψ tiene un mínimo en $W_0^{1,p}(U)$ y concluir que el problema (6) admite una única solución.

   Sugerencia: Considerar una sucesión minimizante, probar que está acotada y deducir que contiene una subsucesión débilmente convergente. Usar la semicontinuidad inferior de la norma con respecto a la convergencia débil para probar que ese límite débil es efectivamente el mínimo de Ψ.

Ejercicio 12. Considerar el siguiente problema parabólico:

$$(7) \quad u_t + \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en} \quad U \times (0,T), \qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U \times (0,T), \qquad u = f \quad \text{en} \quad U \times \{0\},$$

donde $f \in L^2(U)$, $\mathcal{L}$ es un operador elíptico como el del Ejercicio 5 y $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1.

1. Deducir una formulación débil para (7) y demostrar que si una solución débil es suficientemente regular, entonces es una solución de (7).
2. Probar que existe una solución débil de (7).

Ejercicio 13. Repetir el Ejercicio 12, ahora para el problema:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad U \times (0,T), \qquad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U \times (0,T), \qquad u = f \quad \text{en} \quad U \times \{0\}.$$