Ecuaciones Diferenciales A/B – 2° cuatrimestre 2020

Ecuación de ondas

Ejercicio 1.

1. Verificar que el cambio de variables:
$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct, \qquad v(\xi,\eta) = u(x,t) \qquad (c>0),$$
transforma la ecuación de ondas $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0$ en $\partial_{\xi\eta}v = 0$.
2. Sean $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$. Usar el ítem 1. para deducir la fórmula de D'Alembert:
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$$
para la solución del problema:
$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x,t) - c^2\partial_{xx}u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Sean $g \in C^2_c(\mathbb{R})$, $h \in C^1_c(\mathbb{R})$, y sea $u \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ la solución del problema:
$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0) = g(x) \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Se definen la energía cinética k y la energía potencial p por:
$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_t u(x,t))^2\,dx, \qquad p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_x u(x,t))^2\,dx \qquad t>0.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

1. $k+p$ es constante.
2. $k(t) = p(t)$ para t suficientemente grande.

Ejercicio 3. Encontrar una fórmula explícita para la solución del siguiente problema:
$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) &= 0 && x>0,\ t>0,\\ u(0,t) &= 0 && t>0,\\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x>0, \end{aligned}$$
suponiendo $g \in C^2([0,\infty))$, $h \in C^1([0,\infty))$ y $g(0) = h(0) = 0$.

Ejercicio 4. Repetir el Ejercicio 3 cambiando la condición de borde en $x=0$ por $u(0,\cdot\,) = f$, suponiendo $g, f \in C^2([0,\infty))$, $h \in C^1([0,\infty))$ y:
$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = h(0), \quad f''(0) = g''(0).$$
Verificar que la solución obtenida tiene derivadas de segundo orden continuas, aún sobre la característica $x=t$.

Ejercicio 5. Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Probar que la función u dada por la fórmula de fórmula de Kirchhoff:
$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} (g(y) + \nabla g(y))\cdot(y-x) + t h(y)\,dS_y \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0,$$
define una solución $C^2(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$ del problema:
$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R}^3,\ t>0,\\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Sean $g \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$, y sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ la solución dada por la fórmula de Kirchhoff para el problema:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Probar que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

Ejercicio 7. Sean $f, g, h \in C(\mathbb{R})$. Se dice que una función $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ es una solución débil de:

$$\partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) = f \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) = h(x) \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

si verifica:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u(\partial_{tt}\phi - \partial_{xx}\phi)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty (g\phi_t(\,\cdot\,,0) - h\phi(\,\cdot\,,0))\, dx = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f\phi\, dx\, dt,$$

para toda $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

Probar que si $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es solución de (1)-(2) entonces u es solución debíl de (1)-(2). Recíprocamente, probar que si u es una solución débil de (1)-(2) que pertenece a $C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, entonces u es solución de (1)-(2).

Ejercicio 8. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Encontrar una solución de la ecuación:

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = \lambda^2 u \qquad \text{en} \qquad \mathbb{R} \times (0,\infty),$$

de la forma $u(x,t) = f(x^2 - t^2) = f(s)$, donde $f(0) = 1$, en forma de serie de potencias en s.

Ejercicio 9. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (es decir, $u(x,t) = w(|x|,t)$, $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$, para alguna $w : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x,t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|} \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

Ejercicio 10. Utilizar el método de la transformada de Fourier para hallar explícitamente una solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= 0 && x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.