

# Ecuaciones Diferenciales A/B – 2º cuatrimestre 2020

## ECUACIÓN DEL CALOR

**Ejercicio 1.** Sea  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $u : \mathbb{R} \times (0, \infty)$  la función definida por:

$$u(x, t) = v(x^2/t).$$

1. Verificar que  $u$  satisface la ecuación del calor en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  si y sólo si  $v$  es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad z \in \mathbb{R},$$

y que la solución general de esta última ecuación está dada por:

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + C_2 \quad z \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

2. Usar el ítem 1 para deducir la solución fundamental de la ecuación del calor en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ .

Sugerencia: Verificar primero que si  $u$  es solución de la ecuación del calor en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  entonces  $\partial_x u$  también lo es.

**Ejercicio 2.** Sea  $v : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  la función definida por:

$$u(x, t) = t^{-\alpha} v(xt^{-\beta}),$$

para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dados.

1. Verificar que  $u$  satisface la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  si y sólo si  $v$  es solución de la siguiente ecuación:

$$(1) \quad \alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \quad y = t^{-\beta} x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

2. Verificar que si  $\beta = 1/2$  entonces la ecuación (1) se reduce a:

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v(y) + \Delta v(y) = 0 \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

y que si una función radial  $v$ , digamos  $v(y) = w(|y|)$  para  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es solución de esta ecuación entonces  $w$  satisface:

$$\alpha w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = 0 \quad r > 0.$$

3. Deducir la solución fundamental de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  a partir de considerar  $\alpha = n/2$  y  $\beta = 1/2$ .

**Ejercicio 3.**

1. Hallar todas las soluciones  $u$  de la ecuación del calor en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  que satisfacen:

$$u(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \forall x, \lambda \in \mathbb{R}, t > 0.$$

2. Repetir el ítem 1 para la ecuación no lineal  $\partial_x (K(u) \partial_x u) = \partial_t u$ , donde  $K \in C^1(\mathbb{R})$ .
3. Verificar que si  $u$  es solución de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  entonces la función  $u_\lambda$  definida por  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$  también lo es, cualquiera sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $u_i$  una solución de la ecuación del calor en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  que satisface la condición inicial  $u_i(\cdot, 0) = \varphi_i$ , donde  $\varphi_i$  está dado e  $i = 1, \dots, n$ . Probar que la función  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$u(x, t) = u_1(x_1, t) u_2(x_2, t) \dots u_n(x_n, t),$$

es solución de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  y satisface  $u(\cdot, 0) = \varphi$ , donde  $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n)$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Ejercicio 5** (Ecuaciones que se pueden reducir a la ecuación del calor). Determinar explícitamente el cambio de variables sugerido en cada ítem para que la ecuación dada se transforme en la ecuación del calor:

1.  $u_t(x, t) = a(t)\Delta u(x, t)$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,  $a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua y positiva.

Cambio de variables:  $\tau = \phi(t)$ ,  $v(x, \tau) = u(x, \phi(\tau))$ .

2.  $u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + b(t) \cdot \nabla u(x, t)$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,  $b : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua.

Cambio de variables:  $x = \psi(y, t)$ ,  $v(y, t) = u(\psi(y, t), t)$ .

3.  $u_t(x, t) + c(t)u(x, t) = \Delta u(x, t)$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,  $c : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Cambio de variables:  $v(x, t) = u(x, t)\varphi(t)$ .

Usar los ítems anteriores para determinar una solución explícita del siguiente problema:

$$\begin{cases} au_t + cu = \Delta u + b \cdot \nabla u + f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = g & \text{en } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde las funciones  $a$ ,  $b$  y  $c$  son como en los ítems 1, 2 y 3, respectivamente.

**Ejercicio 6** (Principio de Duhamel). Para  $s > 0$ , sea  $v(\cdot; s) : [0, \ell] \times [s, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  solución del problema:

$$\begin{cases} v_t(x, t; s) - v_{xx}(x, t; s) = 0 & 0 < x < \ell, t > s, \\ v(0, t; s) = v(\ell, t; s) = 0 & t > s, \\ v(x, s; s) = g(x, s) & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Probar que la función  $u : [0, \ell] \times [s, \infty)$  definida por:

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; s) ds,$$

es solución del siguiente problema para la ecuación del calor no homogénea:

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = g(x, t) & 0 < x < \ell, t > 0, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

**Ejercicio 7.** Deducir la solución dada para cada uno de los siguientes problemas:

1.  $u_t - u_{xx} = 0$   $x > 0, t > 0$ ,  $u(x, 0) = 0$   $x > 0$ ,  $u(0, t) = h(t)$   $t > 0$ ,  
donde  $h(0) = 0$ .

Solución:  $u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} h(s) ds.$

Sugerencia: Definir  $v(x, t) = u(x, t) - h(t)$  y extender a  $v(\cdot, t)$  por imparidad.

2.  $u_t - u_{xx} = 0$   $x > 0, t > 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$   $x > 0$ ,  $u_x(0, t) = 0$   $t > 0$ .

Solución:  $u(x, t) = \int_0^\infty N(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$

donde  $N(x, \xi, t) = \Phi(x - \xi, t) + \Phi(x + \xi, t)$  y  $\Phi$  es la solución fundamental de la ecuación del calor.

Sugerencia: Extender  $f$  por paridad a  $-\infty < x < 0$  y resolver el problema de valores iniciales para la  $f$  extendida.

**Ejercicio 8.** Para  $T > 0$  y  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado, anotamos:

$$U_T = U \times (0, T], \quad \partial_p U_T = \overline{U_T} \setminus U_T.$$

1. Sea  $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  una solución de la ecuación del calor en  $U_T$  y sea  $K \subset \overline{U_T} \setminus \partial_p U_T$  compacto. Probar que existe  $C > 0$  constante que depende de  $\text{dist}(K, \partial_p U_T)$  tal que:

$$\sup_K |\nabla_x u| \leq C \sup_{U_T} |u|.$$

Sugerencia: Probar primero que si  $u$  es solución de la ecuación del calor en  $C(0, 0; 2)$  entonces existe  $C > 0$  constante tal que:

$$\sup_{C(0,0;1)} |\nabla_x u| \leq C \sup_{C(0,0;2)} |u|,$$

donde  $C(x, t; r) = B_r(x) \times (t - r^2, t]$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  y  $r > 0$ .

2. Sea  $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  solución del problema:

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{en } U_T, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial_p U_T,$$

donde  $f$  no depende de  $t$ . Probar que si  $f \leq 0$ , entonces  $u_t \leq 0$ .

Sugerencia: Definir  $w(x, t) = u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)$ , calcular  $w_t - \Delta w$  y aplicar el principio del máximo.

3. Para  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $u_n \in C^{2,1}(U_T)$  una solución del siguiente problema:

$$\partial_t u_n - \Delta u_n = 0 \quad \text{en } U_T, \quad u_n = f_n \quad \text{sobre } \partial_p U_T.$$

Probar que si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $\partial_p U_T$ , entonces existe  $u \in C^{2,1}(U_T)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  uniformemente en  $U_T$  y  $u$  es solución de:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } U_T, \quad u = f \quad \text{en } \partial_p U_T.$$

4. (Principio débil del máximo para subsoluciones de la ecuación del calor). Se dice que  $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  es una *subsolución* de la ecuación del calor en  $U_T$  si:

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{en } U_T.$$

Demostrar que si  $u$  es una subsolución de la ecuación del calor en  $U_T$  entonces  $\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\partial_p U_T} u$ .

**Ejercicio 9.**

1. Probar que si  $u$  es una solución acotada de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^{n+1}$  entonces  $u$  es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que  $u$  sea acotada?
2. Sea  $u$  una función Lipschitz continua que satisface la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y tal que  $u = 0$  si  $x_1 = 0$ . Probar que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x, t) = \alpha x_1$ .

**Ejercicio 10** (Principio del máximo para problemas parabólicos). Sean  $T > 0$  y  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado. Probar que si  $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  satisface:

$$u_t + \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces  $\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$ , donde  $\partial_t + \mathcal{L}$  es el operador *parabólico* definido por:

$$\partial_t u + \mathcal{L}u = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \partial_i u,$$

los coeficientes  $a_{ij}, b_i$  son continuos en  $U_T$  y la matriz  $A = (a_{ij})$  es simétrica definida positiva para cada  $(x, t) \in U_T$ .

**Ejercicio 11** (Paseo aleatorio simétrico). Suponer que en el punto  $L = \bar{m}h + h/2 > 0$  se ubica una barrera perfectamente refractante: si una partícula llega al punto  $L - h/2$  a tiempo  $t$  y se mueve hacia la derecha, entonces es reflejada y regresa al punto  $L - h/2$  en el tiempo  $t + \tau$ . Probar que si  $h, \tau \rightarrow 0$  y  $h^2/\tau = 2D$ , entonces la probabilidad  $p = p(x, t)$  de que la partícula se encuentre en la posición  $x$  en el tiempo  $t$  es solución del problema:

$$\begin{cases} p_t(x, t) - Dp_{xx}(x, t) = 0 & x < L, t > 0, \\ p(x, 0) = \delta & x < L, \\ p_x(L, t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

Además,  $\int_{-\infty}^L p(x, t) dx = 1$ . Calcular explícitamente la solución  $p$ .

**Ejercicio 12** (Paseo aleatorio simétrico). Suponer que en el punto  $L = \bar{m}h > 0$  se ubica una barrera perfectamente absorbente: si una partícula llega al punto  $L - h$  a tiempo  $t$  y se mueve a la derecha, es absorbida y se detiene en  $L$ . Probar que si  $h, \tau \rightarrow 0$  y  $h^2/\tau = 2D$ , entonces la probabilidad  $p = p(x, t)$  de que la partícula se encuentre en la posición  $x$  en el tiempo  $t$  es solución del problema:

$$\begin{cases} p_t(x, t) - Dp_{xx}(x, t) = 0 & x < L, t > 0, \\ p(x, 0) = \delta & x < L, \\ p(L, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Calcular explícitamente la solución  $p$ .