Ecuaciones diferenciales A/B - 2020 (segundo cuatrimestre)
Docentes: Nicolás Saintier - Andrea Ceretani - Martín Completa
Universidad de Buenos Aires

MATERIAL COMPLEMENTARIO

TEMA: SOLUCIONES DÉBILES

Teorema 1 (Teorema de traza, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $1 \leq p < \infty$. Existe un operador lineal y continuo, denominado operador de traza,

$$Tr : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U),$$

tal que $Tr(u) = u|_{\partial U}$ para toda $u \in C(\bar{U}) \cap W^{1,p}(U)$.

Definición 1 (ver [2]).
Sea H un espacio de Hilbert. Una aplicación $B : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice:

1. *simétrica, si $B[u, v] = B[v, u]$ para todo $u, v \in H$,*
2. *bilineal, si $B[\alpha u + \beta v, w] = \alpha B[u, w] + \beta B[v, w]$ y $B[u, \alpha v + \beta w] = \alpha B[u, v] + \beta B[u, w]$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y todo $u, v, w \in H$,*
3. *continua, si existe $C > 0$ constante tal que $|B[u, v]| \leq C\|u\|_H \|v\|_H$ para todo $u, v \in H$,*
4. *coerciva, si existe $\gamma > 0$ constante tal que $B[u, u] \geq \gamma \|u\|_H^2$ para todo $u \in H$.*

Definición 2 (ver [2]).
Sea H un espacio normado. El espacio dual de H se define como el espacio de todos los funcionales $\varphi : H \to \mathbb{R}$ lineales y continuos.

El espacio dual de H se anota como H' y para $\varphi \in H'$ se suele anotar $\varphi(v)$ como $\langle \varphi, v \rangle$.

Teorema 2 (Lax-Milgram, ver [2]).
Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, continua y coerciva. Entonces, dado $\varphi \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que $B[u, v] = \langle \varphi, v \rangle$ para todo $v \in H$.

El teorema de representación de Riesz es un caso especial del teorema de Lax-Milgram para el caso en que B es, además, simétrica puesto que en tal caso B define un producto interno en H equivalente al que hace de H un espacio de Hilbert.

Teorema 3 (Rellich-Kondrachov, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $1 < p < \infty$. Si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $W^{1,p}(U)$ entonces existen $u \in W^{1,p}(U)$ y $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que:

1. $u_{k_j} \to u$ *en* $L^p(U)$.
2. $\|\nabla u\|_p \leq \liminf \|\nabla u_{k_j}\|_p$.

Ejemplo 1.
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1. Considerar el problema:

$$-\Delta u = f \qquad \text{en} \quad U, \tag{1}$$
$$\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u = g \qquad \text{en} \quad \partial U, \tag{2}$$

donde $\alpha > 0$, $f \in C(U)$ y $g \in C(\partial U)$.

1. Una función $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ es solución (fuerte) de (1)-(2) si y sólo si satisface la siguiente formulación débil para (1)-(2):

   $$\textit{Hallar } u \in H^1(U) \textit{ tal que } B[u,v] = \langle F, v\rangle \textit{ para toda } v \in H^1(U), \tag{3}$$

   donde:

   $$B[u,v] = \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \alpha \int_{\partial U} Tr(v) Tr(u)\, dS \qquad u, v \in H^1(U),$$
   $$\langle F, v\rangle = \int_U fv\, dx + \int_{\partial U} Tr(v) g \, dS \qquad v \in H^1(U).$$

   A una solución de (3) la denominamos solución débil de (1)-(2). Notar que la formulación débil (3) tiene sentido aún para $f \in L^2(U)$ y $g \in L^2(\partial U)$.

2. Existe una constante $C > 0$ tal que:

   $$\int_U u^2\, dx \leq C\left(\int_U |\nabla u|^2\, dx + \alpha \int_{\partial U} (Tr(u))^2\, dS\right) \qquad \forall\, u \in H^1(U). \tag{4}$$

3. El problema (3) admite una única solución para cualquier $f \in L^2(U)$ y cualquier $g \in L^2(\partial U)$. En consecuencia, el problema (1)-(2) admite una única solución débil.

Demostración.

1. Sea $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$. Suponemos primero que u es solución de (1)-(2). Notar que $u \in H^1(U)$. Multiplicando (1) por $v \in H^1(U)$, luego integrando sobre U y finalmente usando la fórmula de Green, se tiene:

   $$\begin{aligned}\int_U fv\, dx &= \int_U (-\Delta u) v\, dx \\ &= \int_U \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\partial U} Tr(v) \partial_{\mathbf{n}} u \, dS.\end{aligned}$$

Luego, como u satisface (2), obtenemos:

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \alpha \int_{\partial U} Tr(v) u \, dS = \int_U f v \, dx + \int_{\partial U} Tr(v) g \, dS. \qquad (5)$$

Notando que $Tr(u) = u$ por ser u continua en $\bar{U}$, se tiene que u satisface (3).

Supongamos ahora que u es solución de (3). Primero observamos que si v es la restricción a U de una función en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $v \in H^1(U) \cap C^\infty(U)$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_U f v \, dx + \int_{\partial U} v g \, dS &= \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \alpha \int_{\partial U} v u \, dS \\ &= \int_U (-\Delta u) v \, dx + \int_{\partial U} v \partial_{\mathbf{n}} u \, dS + \alpha \int_{\partial U} v u \, dS,\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_U (-\Delta u - f) v \, dx + \int_{\partial U} v(\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u - g) \, dS = 0. \qquad (6)$$

Como las restricciones a U de funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $H^1(U)$, obtenemos (ejercicio):

$$\int_U (-\Delta u - f) v \, dx + \int_{\partial U} Tr(v)(\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u - g) \, dS = 0 \qquad \forall \, v \in H^1(U). \quad (7)$$

En particular, se tiene:

$$\int_U (-\Delta u - f) v \, dx = 0 \qquad \forall \, v \in C_c^\infty(U),$$

ya que $Tr(v) = v = 0$ para $v \in C_c^\infty(U)$, lo cual implica que $-\Delta u = f$ en c.t.p. U. Notando que Δu y f son continuas en U, sigue que u satisface (1). Usando esto junto con (7), vemos que

$$\int_{\partial U} v(\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u - g) \, dS = 0, \qquad (8)$$

para toda $v \in H^1(U)$ y, en particular, para toda $v \in C^1(\bar{U})$. Usando ahora que $C^1(\bar{U})$ es denso en $C(\bar{U})$ con la norma del supremo, sigue que (8) también vale para toda $v \in C(\bar{U})$ (ejercicio). Finalmente, como toda función en $C(\partial U)$ admite una extensión en $C(\bar{U})$ (teorema de Tietze), se tiene que (8) vale para cualquier $v \in C(\partial U)$. Entonces, eligiendo $v = \partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u - g$, se ve que

$$\int_{\partial U} |\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u - g|^2 \, dS = 0.$$

Luego, $\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u = g$ en c.t.p. ∂U así que, por continuidad, u también satisface (2).

Otra forma de ver que se verifica (2) es la siguiente. Supongamos, por el contrario, que $\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) + \alpha u(x_0) \neq g(x_0)$ para algún $x_0 \in \partial U$, por ejemplo, que $\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) + \alpha u(x_0) > g(x_0)$. Como ∇u es continuo en $\bar{U}$ y $\mathbf{n}$ es continuo en ∂U por ser ∂U de clase C^1, se tiene que $\partial_{\mathbf{n}} u$ es continua en ∂U. Como u

y g también son continuas en ∂U, deducimos que existe $\Gamma \subset \partial U$, con medida $(n-1)$-dimensional positiva, tal que $x_0 \in \Gamma$ y $\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u > g$ en Γ. Ahora elegimos $v \in C^1(\bar{U})$ tal que $v = 1$ en algún $\Gamma_0 \subset \Gamma$, con medida $(n-1)$-dimensional positiva, y $sop(v) \cap \partial U \subset \Gamma$. Entonces,

$$\int_{\partial U} v(\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u - g)\, dS = \int_{\Gamma} v(\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u - g)\, dS \geq \int_{\Gamma_0} (\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u - g)\, dS > 0,$$

contradiciendo que vale (8) para toda $v \in H^1(U)$. Se llega a la misma conclusión si se supone $\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u < g$.

2. Supongamos, por el absurdo, que no existe $C > 0$ de modo que valga (4). Entonces existe una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(U)$ tal que:

$$\int_U |\nabla u_k|^2\, dx + \alpha \int_{\partial U} (Tr(u_k))^2\, dS < \frac{1}{k} \int_U u_k^2\, dx \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Notar que (9) implica $\|u_k\|_2 \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Dividiendo miembro a miembro de (9) por $\|u_k\|_2^2$, obtenemos:

$$\int_U |\nabla v_k|^2\, dx + \alpha \int_{\partial U} Tr(v_k)^2\, dS < \frac{1}{k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

donde $v_k = u_k/\|u_k\|_2$.
A partir de (10) se tiene que $\|\nabla v_k\|_2 < 1/\sqrt{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, así que

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla v_k\|_2 = 0. \tag{11}$$

Además, como $\|\nabla v_k\|_2 < 1$ y $\|v_k\|_2 = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H^1(U)$. Entonces, por el teorema de Rellich-Kondrachov, existe una subsucesión $\{v_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$v_{k_j} \to v \qquad \text{en} \quad L^2(U), \tag{12}$$

$$\|\nabla v\|_2 \leq \liminf_{j\to\infty} \|\nabla v_{k_j}\|_2. \tag{13}$$

De (11) y (13), deducimos que $\nabla v = 0$. Notar que entonces (11) equivale a decir $\nabla v_{k_j} \to \nabla v$ en $L^2(U)$. Combinando esto último con (12) obtenemos que

$$v_{k_j} \to v \qquad \text{en} \quad H^1(U). \tag{14}$$

A partir de (10) también se tiene que $\|Tr(v_k)\|_{L^2(\partial U)} < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo cual

$$Tr(v_{k_j}) \to 0 \qquad \text{en} \quad L^2(\partial U). \tag{15}$$

Por la continuidad del operador de traza $Tr : H^1(U) \to L^2(\partial U)$, sigue de (14) que $Tr(v_k) \to Tr(v)$ en $L^2(\partial U)$. Combiando esto con (15) obtenemos que $Tr(v) = 0$ en ∂U. Como, además, v es constante en cada componente conexa de U por tener gradiente débil nulo, concluimos que $v = 0$ en U. Esto contradice (14) ya que $\|v_{k_j}\|_2 = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

3. Para probar la existencia y unicidad de solución para (3) con $f \in L^2(U)$ y $g \in L^2(\partial U)$ usaremos el teorema de Lax-Milgram. Entonces, basta ver que B es bilineal, continua y coersiva, y que F es lineal y continuo.
   La bilinealidad de B es consecuencia de la linealidad del operador de traza, del operador gradiente débil y de la integral. En forma similar se ve la linealidad de F.
   Veamos ahora que B es continua. Usando la desigualdad de Hölder y la continuidad del operador de traza, vemos que para $u, v \in H^1(U)$ se tiene:

$$\begin{aligned} |B[u,v]| &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \alpha \|Tr(u)\|_{L^2(\partial U)} \|Tr(v)\|_{L^2(\partial U)} \\ &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \alpha\, C^2 \, \|u\|_{H^1(U)} \|v\|_{H^1(U)} \\ &\leq \left(1 + \alpha\, C^2\right) \|u\|_{H^1(U)} \|v\|_{H^1(U)}, \end{aligned}$$

   donde C es la constante de continuidad del operador de traza. Por lo tanto B es continua. En forma similar se obtiene la continuidad de F.
   Para probar que B es coersiva, razonamos por el absurdo. Suponemos que B no es coersiva, por lo que existe una sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(U)$ tal que

$$B[u_k, u_k] < \frac{1}{k} \|u_k\|^2_{H^1(U)} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

   Notar que, como $B[u_k, u_k] \geq 0$, la desigualdad anterior implica $\|u_k\|_{H^1(U)} \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dividiendo (16) miembro a miembro por $\|u_k\|^2_{H^1(U)}$ y usando la bilinealidad de B, obtenemos:

$$B[v_k, v_k] < \frac{1}{k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

   donde $v_k = u_k / \|u_k\|_{H_0^1(U)}$. Combinando (17) con la desigualdad (4) en el ítem 2, obtenemos que $v_k \to 0$ en $L^2(U)$. Además, como $\|\nabla v_k\|_2 \leq B[v_k, v_k]$ para todo $k \in \mathbb{N}$, sigue de (17) que $\nabla v_k \to 0$ en $L^2(U)$. Por lo tanto, $v_k \to 0$ en $H^1(U)$. Esto contradice que $\|v_k\|_{H^1(U)} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego B es coersiva.

Nota.

1. En el ítem 1 vimos que si u es solución de (1)-(2) entonces satisface (3), y que si u es una solución débil con suficiente regularidad, entonces u es solución de (1)-(2). Los pasos seguidos en la prueba son los que habitualmente se siguen para proponer una formulación débil.
2. La aplicación B que aparece en la formulación débil (3) es simétrica. Por lo tanto, el ítem 3 también se puede demostrar mediante el Teorema de Riesz realizando cambios menores sobre la prueba dada (ejercicio).

Teorema 4 (Desigualdad de Poincaré, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $1 \leq p < \infty$. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(U).$$

El mismo resultado vale si U es acotado en al menos una dirección.

Gracias a la desigualdad de Poincaré se tiene que $\|u\|_{1,p}$ y $\|\nabla u\|_p$ definen normas equivalentes en $W_0^{1,p}(U)$.

Ejemplo 2.
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sean $w \in H^1(U, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(U)$. Si $1 - \frac{1}{2}div(w) \geq 0$ en U entonces el problema:

$$-\Delta u + w \cdot \nabla u + u = f \qquad \text{en} \quad U, \tag{18}$$
$$u = 0 \qquad \text{en} \quad \partial U, \tag{19}$$

admite una única solución débil u, la cual está definida como la única solución de la siguiente formulación débil para (18)-(19):

$$\textit{Hallar } u \in H_0^1(U) \textit{ tal que } B[u, v] = \langle F, v\rangle \textit{ para toda } v \in H_0^1(U), \tag{20}$$

donde:

$$B[u, v] = \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_U (w \cdot \nabla u + u)\, v \, dx \qquad u, v \in H_0^1(U),$$
$$\langle F, v\rangle = \int_U f v \, dx \qquad v \in H_0^1(U).$$

Demostración. Como la prueba es similar a la hecha en el ítem 3 del Ejemplo 1, a continuación daremos sólo los lineamientos más generales de la demostración. Notar que ahora la aplicación B no es simétrica, por lo que la demostración no puede hacerse mediante el Teorema de Riesz (ver Nota al final del Ejemplo 1).

La bilinealidad de B y la linealidad de F son fáciles de verificar, al igual que la continuidad de F. Usando las desigualdades de Hölder y de Poincaré se ve que para todo $u, v \in H_0^1(U)$ se verifica:

$$\begin{aligned}
|B[u, v]| &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|w\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \\
&\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + C\|w\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + C^2 \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \\
&\leq (1 + C\|w\|_\infty + C^2) \|\nabla u\|_{H_0^1(U)} \|\nabla v\|_{H_0^1(U)},
\end{aligned}$$

siendo C la constante en la desigualdad de Poincaré. Por lo tanto B es continua. Notar que hasta ahora no hemos usado la hipótesis sobre la divergencia de v, pero nos hará falta a continuación para probar la coersividad de B.

Sea $u \in H_0^1(U)$. Primero escribimos:

$$\int_U (w \cdot \nabla u) u \, dx = \int_U \sum_{i=1}^n (u w_i) \partial_{x_i} u \, dx.$$

Integrando por partes y usando que $Tr(u) = 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_U \sum_{i=1}^{n} (uw_i)\partial_{x_i} u \, dx &= -\int_U \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(uw_i) u \, dx \\ &= -\int_U \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} u) w_i u \, dx - \int_U \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} w_i) u^2 \, dx \\ &= -\int_U (w \cdot \nabla u) u \, dx - \int_U u^2 \, div(w) \, dx.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_U (w \cdot \nabla u) u \, dx = -\frac{1}{2} \int_U u^2 \, div(w) \, dx.$$

Luego,

$$B[u,u] = \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \int_U \left(1 - \frac{1}{2} div(w)\right) u^2 \, dx.$$

Usando que $1 - \frac{1}{2} div(v) \geq 0$ en U, obtenemos:

$$B[u,u] \geq \int_U |\nabla u(x)|^2 \, dx = \|u\|^2_{H_0^1(U)}.$$

Por lo tanto B es coersiva.

DEFINICIÓN 3 (Operador compacto en un espacio de Hilbert, ver [2]).
Sean H un espacio de Hilbert, Y un espacio normado y $A : H \to Y$ un operador lineal y continuo. Se dice que A es compacto si de toda sucesión acotada $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ se puede extraer una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $\{Au_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ sea convergente. De forma equivalente, A es compacto si $Au_k \to Au$ para toda sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ débilmente convergente a u en H.

DEFINICIÓN 4 (Operador autoadjunto, ver [2]).
Sean H un espacio de Hilbert y $A : H \to H$ un operador lineal y continuo. Se dice que A es autoadjunto si $(u, Av)_H = (Au, v)_H$ para todo $u, v \in H$ donde $(\cdot\,,\cdot)_H$ es el producto interno en H.

DEFINICIÓN 5 (Operador positivo, ver [2]).
Sean H un espacio de Hilbert y $A : H \to H$ un operador lineal. Se dice que A es positivo si $(Au, u)_H > 0$ para todo $u \in H$, $u \neq 0$, donde $(\cdot\,,\cdot)_H$ es el producto interno en H.

TEOREMA 5 (Descomposición espectral para operadores compactos y autoadjuntos, ver [2]).
Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $A : H \to H$ un operador lineal y continuo. Si A es compacto y autoadjunto entonces existe una base ortornomal numerable $\{\varphi_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H formada por autofunciones de A. Además, la sucesión de autovalores asociados, digamos $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tiene las siguientes propiedades:

1. $\lambda_k \in \mathbb{R}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.
2. $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.
3. $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.

Nota. Sean H y $A : H \to H$ como en el Teorema 5, y sea $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H formada por autofunciones de A. Consideremos $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\varphi_k \in H$, donde $u_k = (u, \varphi_k)_H$ siendo $(\cdot\,,\cdot)_H$ el producto interno en H. Como $u = \lim_{M\to+\infty} \sum_{k=1}^{M} u_k\varphi_k$ y A es continua, tenemos:

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} u_k A\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k \varphi_k.$$

Por lo tanto A es diagonalizable, es decir,

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, \varphi_k)_H \varphi_k \qquad \forall\, u \in H.$$

EJEMPLO 3.
Sea $A : L^2(U) \to H^1(U)$ el operador definido por $Af = u$ donde u es la única solución débil de

$$-\Delta u = f \qquad \text{en} \quad U, \tag{21}$$
$$\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u = 0 \qquad \text{en} \quad \partial U. \tag{22}$$

Notar que A está bien definido por lo hecho en el Ejemplo 1. Valen las siguientes propiedades:

1. A es lineal y continuo.
2. $i \circ A$ es compacto, autoadjunto y positivo, donde i es la inyección canónica de $H^1(U)$ en $L^2(U)$.

Además, existen $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(U)$ tales que cada u_k es solución débil de:

$$-\Delta u_k = \nu_k u_k \qquad \text{en} \quad U,$$
$$\partial_{\mathbf{n}} u_k + \alpha u_k = 0 \qquad \text{en} \quad \partial U,$$

y se verifican las siguientes propiedades:

1. $0 < \nu_1$ y $\nu_k \leq \nu_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \nu_k = \infty$.
3. $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base de $L^2(U)$ y $\{u_k/\sqrt{\nu_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base de $H^1(U)$ para el producto interno B.

Demostración.

1. Veamos primero que A es lineal, es decir, que:

   $$A(f_1 + \lambda f_2) = Af_1 + \lambda Af_2 \qquad \forall\, f_1, f_2 \in L^2(U),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Consideramos $f_1, f_2 \in L^2(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y definimos $u_i = A(f_i)$ para $i = 1, 2$. Por definición de A, se tiene:

   $$B[u_i, v] = \int_U f_i v\, dx \qquad \forall\, v \in H^1(U).$$

   Usando la linealidad de B con respecto a su primer argumento, obtenemos:

   $$B[u_1+\lambda u_2, v] = B[u_1, v]+\lambda B[u_2, v] = \int_U (f_1+\lambda f_2)v\, dx \qquad \forall\, v \in H^1(U).$$

   Por lo tanto, $A(f_1 + \lambda f_2) = u_1 + \lambda u_2$. Luego A es lineal.

   Veamos ahora que A es continua, es decir, que existe una constante $C > 0$ tal que:

   $$\|Af\|_{H^1(U)} \leq C\, \|f\|_2 \qquad \forall\, f \in L^2(U). \tag{23}$$

   Consideramos $f \in L^2(U)$, definimos $u = Af$ y observamos que:

   $$B[u, v] = \int_U f v\, dx \qquad \forall\, v \in H^1(U). \tag{24}$$

   Eligiendo $v = u$ en (24), usando la coersividad de B y luego la desigualdad de Hölder, obtenemos:

   $$\gamma\, \|u\|^2_{H^1(U)} \leq B[u, u] = \int_U f u\, dx \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq \|f\|_2 \|u\|_{H^1(U)},$$

   donde γ es la constante de coersividad de B. Luego (23) se verifica con $C = \gamma^{-1}$.

2. Veamos primero que $i \circ A$ es compacto. Para ello consideramos una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(U)$ acotada y observamos que $\{Af_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H^1(U)$ por la continuidad de A, ver (23). Entonces, por el teorema de Rellich-Kondrachov, existe una subsucesión $\{Af_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{Af_k\}$ que converge en $L^2(U)$. En otras palabras, $\{(i \circ A)f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2(U)$. Luego $i \circ A$ es compacto.

Para simplificar la notación de ahora en adelante anotaremos $i \circ A$ simplemente por A. Veamos que A es autoadjunto, es decir, que:

$$(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2) \qquad \forall\, f_1, f_2 \in L^2(U),$$

donde $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ denota el producto interno usual en $L^2(U)$. Consideramos $f_1, f_2 \in L^2(U)$, definimos $u_1 = Af_1$, $u_2 = Af_2$ y observamos que:

$$B[u_1, v] = (f_1, v), \qquad B[u_2, v] = (f_2, v) \qquad\qquad \forall\, v \in H^1(U),$$

por definición de A. Eligiendo $v = u_2$ en la primera igualdad y $v = u_1$ en la segunda, obtenemos:

$$B[u_1, u_2] = (f_1, u_2), \qquad B[u_2, u_1] = (f_2, u_1).$$

Como B es simétrica, se tiene $(f_1, u_2) = (f_2, u_1)$, es decir, $(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2)$. Luego A es autoadjunto.

Veamos finalmente que A es positiva, es decir:

$$(Af, f) > 0 \qquad \forall\, f \in L^2(U),\ f \neq 0.$$

Por definición de A, se tiene que $B[Af, v] = (f, v)$ para todo $v \in L^2(U)$. Eligiendo $v = Af$ y usando que B es coersiva, obtenemos:

$$(f, Af) = B[Af, Af] \geq \gamma\, \|Af\|^2_{H^1(U)}.$$

El lado derecho la desigualdad es positivo siempre que $Af \neq 0$, es decir, siempre que $f \neq 0$. Luego, A es positivo.

3. Como $A : L^2(U) \to L^2(U)$ es lineal, continuo, compacto y autoadjunto, sabemos que existe una base $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormal de $L^2(U)$ formada por autofunciones de A, asociada a autovalores reales $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades:

$$|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad\qquad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0. \tag{25}$$

Además, como A es positivo, resulta que cada λ_k es positivo. En efecto, se tiene:

$$0 < (Au_k, u_k) = (\lambda_k u_k, u_k) = \lambda_k \|u_k\|_2^2,$$

así que $\lambda_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como cada u_k verifica $Au_k = \lambda_k u_k$, se tiene:

$$B[\lambda_k u_k, v] = (u_k, v) \qquad\qquad \forall\, v \in H^1(U).$$

Equivalentemente,

$$B[u_k, v] = \nu_k (u_k, v) \qquad\qquad \forall\, v \in H^1(U), \tag{26}$$

donde $\nu_k = 1/\mu_k$. Luego, cada u_k es solución débil de:

$$\begin{aligned} -\Delta u_k &= \nu_k u_k && \text{en } U, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_k + \alpha u_k &= 0 && \text{en } \partial U. \end{aligned}$$

Como cada λ_k es positivo y se tiene (25), deducimos que $\nu_1 > 0$, $\nu_k \leq \nu_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y que $\lim_{k\to\infty} \nu_k = 0$.

Sólo falta probar que $\{u_k/\sqrt{\nu_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base de $H^1(U)$. Primero observamos que B define un producto interno en $H^1(U)$ equivalente al usual, por ser B simétrica, bilineal, continua y coerciva (ejercicio). A partir de (26) obtenemos:

$$B[u_k, u_l] = \nu_k(u_k, u_l) = \nu_k \delta_{kl} \qquad \forall\, k, l \in \mathbb{N},$$

ya que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es ortonormal en L^2. Luego, $\{u_k/\sqrt{\nu_k}\}$ es ortonormal en $H^1(U)$. Para ver que $\{u_k/\sqrt{\nu_k}\}$ forma una base de $H^1(U)$ basta ver que si $v \in H^1(U)$ es ortogonal a cada u_k, entonces $v = 0$. Consideramos entonces $v \in L^2(U)$ tal que $B[u_k, v] = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y observamos que:

$$0 = B[u_k, v] = \nu_k(u_k, v),$$

por lo que $(v, u_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base de $L^2(U)$, obtenemos que $v = 0$.

Referencias

[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2 edition, 2003.

[2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.