Ecuaciones diferenciales A/B - 2020 (segundo cuatrimestre)
Docentes: Nicolás Saintier - Andrea Ceretani - Martín Completa
Universidad de Buenos Aires

MATERIAL COMPLEMENTARIO

TEMA: ESPACIOS DE SOBOLEV

Definición 1 (ver [4]).
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ un multi-índice. Se dice que una función $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tiene derivada débil de orden α si existe $v \in L^1_{loc}(U)$ tal que:

$$\int_U u(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(U).$$

En tal caso, se dice que v es la derivada débil de orden α de u y se anota $v = D^\alpha u$.

Esta es una buena definición en el sentido que si v_1 y v_2 son derivadas débiles de u de orden α, entonces $v_1 = v_2$ en casi todo punto (ejercicio).

Ejemplo 1.
La función $u : (0,2) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ k & \text{si} \quad 1 < x < 2, \end{cases}$$

admite derivada débil de primer orden si y sólo si $k = 1$, en cuyo caso, la derivada débil está dada por:

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Demostración. Consideramos primero el caso $k = 1$ y observamos que $v \in L^1_{loc}(0,2)$. Además, para $\varphi \in C_c^\infty(0,2)$, se tiene:

$$\int_0^2 u(x)\varphi'(x)\, dx = \int_0^1 x\varphi'(x)\, dx + \int_1^2 \varphi'(x)\, dx.$$

Entonces, integrando por partes el primer término del lado derecho y usando que $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$, obtenemos:

$$\int_0^2 u(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_0^1 \varphi(x)\, dx = -\int_0^2 v(x)\varphi(x)\, dx.$$

Luego u admite derivada débil de primer orden, siendo $u' = v$.

Consideramos ahora el caso $k \neq 1$ y suponemos, por el absurdo, que existe $v \in L^1_{loc}(0,2)$ tal que $v' = u$ en sentido débil. Entonces, para cualquier $\varphi \in C_c^\infty(0,2)$ se tiene:

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v(x)\varphi(x)\, dx = \int_0^2 u(x)\varphi'(x)\, dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)\, dx + k\int_1^2 \varphi'(x)\, dx \\ &= (1-k)\varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\, dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora consideramos una sucesión $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de funciones uniformemente acotadas en $C_c^\infty(0,2)$ tal que $\varphi_m(1)=1$ para todo $m\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)=0$ para todo $x\in(0,2)$, $x\neq 1$. A partir de (1), obtenemos:

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\,dx - \int_0^2 v(x)\varphi_m(x)\,dx = 1-k, \tag{2}$$

para cualquier $m\in\mathbb{N}$. Haciendo $m\to\infty$ en (2) se llega a una contradicción, ya que el lado izquierdo tiende a cero. Luego, u no admite derivada débil si $k\neq 1$.

DEFINICIÓN 2 (ver [4]).
Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto, y sean $k\in\mathbb{N}$ y $1\le p\le\infty$. Se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$ como el espacio normado:

$$W^{k,p}(U)=\{u\in L^p(U): D^\alpha u\in L^p(U) \text{ para todo } \alpha\in\mathbb{N}_0^n \text{ con } |\alpha|\le k\},$$

con la norma

$$\|u\|_{k,p}=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p} & \text{si} \quad 1\le p<\infty,\\[2ex] \displaystyle\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_\infty & \text{si} \qquad p=\infty,\end{cases}$$

EJEMPLO 2.
Si $u\in W^{k,p}(U)$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ son dos multiíndices tales que $|\alpha|+|\beta|\le k$, entonces $D^\alpha u\in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ y $D^\beta D^\alpha u=D^{\alpha+\beta}u$.

Demostración. Vamos a probar:

$$\int_U D^\alpha u(x)D^\beta\varphi(x)\,dx=(-1)^{|\beta|}\int_U \varphi(x)D^{\alpha+\beta}u(x)\,dx \qquad \forall\,\varphi\in C_c^\infty(U),$$

lo cual nos dará $D^\alpha u\in W^{k-\alpha,p}(U)$ y $D^\beta D^\alpha u=D^{\alpha+\beta}u$.

Sea $\varphi\in C_c^\infty(U)$. Como $u\in W^{k,p}(U)$ y $|\alpha|\le k$, sigue que $u\in W^{|\alpha|,p}$ y

$$\int_U D^\alpha u(x)D^\beta\varphi(x)\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_U u(x)D^\alpha D^\beta\varphi(x)\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_U u(x)D^{\alpha+\beta}\varphi(x)\,dx,$$

puesto que $D^\beta\varphi\in C_c^\infty(U)$. Similarmente, como $u\in W^{k,p}(U)$ y $|\alpha|+|\beta|\le k$, resulta:

$$\int_U u(x)D^{\alpha+\beta}\varphi(x)\,dx=(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_U \varphi(x)D^{\alpha+\beta}u(x)\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_U D^\alpha u(x)D^\beta\varphi(x)\,dx&=(-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_U \varphi(x)D^{\alpha+\beta}u(x)\,dx\\&=(-1)^{|\beta|}\int_U \varphi(x)D^{\alpha+\beta}u(x)\,dx.\end{aligned}$$

Teorema 1 (Densidad de las funciones suaves, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con frontera de clase C^1 y sea $1 \leq p < \infty$. Las restricciones a U de las funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $W^{1,p}(U)$.

Teorema 2 (Teorema de traza, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $1 \leq p < \infty$. Existe un operador lineal y continuo

$$Tr : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U),$$

tal que $Tr(u) = u|_{\partial U}$ para toda $u \in C(\bar{U}) \cap W^{1,p}(U)$.

La imagen $Tr(u)$ de $u \in W^{1,p}(U)$ se denomina “traza” de u en ∂U.

Definición 3 (ver [4]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y sean $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Se define el espacio $W_0^{k,p}(U)$ como la clausura en $W^{k,p}(U)$ de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en U, es decir,

$$W_0^{k,p}(U) = \overline{C_c^\infty(U)}^{W^{1,p}(U)}.$$

Teorema 3 (Caracterización de las funciones en $W_0^{1,p}(U)$, ver [1]).
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1 y $1 \leq p < \infty$. Una función $u \in W^{1,p}(U)$ satisface $Tr(u) = 0$ si y sólo si $u \in W_0^{1,p}(U)$, es decir, si y sólo si existe una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(U)$ tal que $u_k \to u$ en $W^{1,p}(U)$.

Ejemplo 3. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1.

1. (Fórmula de integración por partes) Para toda $u \in W^{1,p}(U)$ y toda $v \in W^{1,p'}(U)$, se tiene:

$$\int_U u\partial_i v = -\int_U v\partial_i u + \int_{\partial U} Tr(u)Tr(v)n_i \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

   donde n_i es la i-ésima componente del campo normal exterior unitario $\mathbf{n}$ a la frontera de U y p' es el exponente conjugado de p.

2. (Fórmula de Green) Para toda $u \in W^{1,p}(U)$ y toda $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, se tiene:

$$\int_U \phi \cdot \nabla u = -\int_U u\,\mathrm{div}(\phi) + \int_{\partial U} Tr(u)\phi\mathbf{n}. \tag{4}$$

Demostración.

1. Notar que todos los términos en (3) están bien definidos para $u \in W^{1,p}(U)$ y $v \in W^{1,p'}(U)$ (ejercicio, usar la desigualdad de Hölder y el teorema de traza).

   Usando que las restricciones a U de las funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas tanto en $W^{1,p}(U)$ y como en $W^{1,p'}(U)$, vemos que existen $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $u_k \to u$ en $W^{1,p}(U)$ y $v_k \to v$ en $W^{1,p'}(U)$. Como (3) se verifica para funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

$$\int_U u_k \partial_i v_k = -\int_U v_k \partial_i u_k + \int_{\partial U} u_k v_k n_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, n,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Para obtener (3) basta hacer $k \to \infty$ miembro a miembro de la expresión anterior, como se muestra a continuación.

Como $u_k \to u$ en $W^{1,p}(U)$, se tiene que $u_k \to u$ y $\partial_i u_k \to \partial_i u$ en $L^p(U)$. Además, por la continuidad del operador de traza, también se tiene que $Tr(u_k) \to Tr(u)$ en $L^p(\partial U)$. Como $Tr(u_k) = u_k$ sobre ∂U para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos escribir la última convergencia simplemente como $u_k \to Tr(u)$ en $L^p(\partial U)$. De forma análoga se tiene $v_k \to v$ y $\partial_i v_k \to \partial_i v$ en $L^{p'}(U)$, y $v_k \to Tr(v)$ en $L^{p'}(\partial U)$. Luego,

$$\begin{array}{lcll} u_k \partial_i v_k & \to & u \partial_i v & \text{en} \quad L^1(U), \\ v_k \partial_i u_k & \to & v \partial_i u & \text{en} \quad L^1(U), \\ u_k v_k n_i & \to & Tr(u) Tr(v) n_i & \text{en} \quad L^1(\partial U), \end{array}$$

de donde se tiene la convergencia buscada.

2. La prueba es análoga a la hecha en el item anterior: Consideramos $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \to u$ en $W^{1,p}(U)$, notamos que (4) vale para cada u_k:

$$\int_U \phi \cdot \nabla u_k = -\int_U u_k \operatorname{div}(\phi) + \int_{\partial U} u_k \phi \mathbf{n},$$

y finalmente pasamos al límite cuando $k \to \infty$. Para esto último usamos que $u_k \to u$ y $\nabla u_k \to \nabla u$ en $L^p(U)$, y que $u_k \to Tr(u)$ en $L^p(\partial U)$.

Teorema 4 (Rellich-Kondrachov, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $1 < p < \infty$. Si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $W^{1,p}(U)$ entonces existen $u \in W^{1,p}(U)$ y $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que:

1. $u_{k_j} \to u$ *en* $L^p(U)$.
2. $\|\nabla u\|_p \leq \liminf \|\nabla u_{k_j}\|_p$.

Teorema 5 (ver [3]).
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p \leq \infty$. Si $u_k \to u$ en $L^p(U)$ entonces existen $g \in L^p(U)$ y $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que:

1. $\lim_{j\to\infty} u_{k_j}(x) \to u(x)$ *para casi todo* $x \in U$.
2. $|u_{k_j}(x)| \leq g(x)$ *para casi todo* $x \in U$ *y para todo* $j \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $c > 0$ tal que:

$$\|u\|_2 \leq \varepsilon \|u\|_{1,2} + c \|u\|_1 \qquad \forall\, u \in W^{1,2}(U).$$

Demostración. Suponemos, por el absurdo, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $v_k \in W^{1,2}(U)$ que verifica:

$$\|v_k\|_2 > \varepsilon_0 \|v_k\|_{1,2} + k\|v_k\|_1. \tag{5}$$

Consideramos $k \in \mathbb{N}$ y observamos que $v_k \neq 0$. Entonces podemos dividir (5) miembro a miembro por $\|v_k\|_2$ y así obtenemos que $u_k = v_k/\|v_k\|_2$ satisface:

$$1 \geq \varepsilon_0 \|u_k\|_{1,2} + k\|u_k\|_1. \tag{6}$$

A partir de (6) vemos que $\|u_k\|_{1,2} \leq 1/\varepsilon_0$, por lo que deducimos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W^{1,2}(U)$. Usando ahora el teorema de Rellich-Kondrachov, obtenemos que existen $u \in W^{1,2}(U)$ y una subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, a la cual también denotamos por $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tales que $u_k \to u$ en $L^2(U)$. Como U es acotado, esto implica que $u_k \to u$ también en $L^1(U)$. Usando (6) nuevamente, vemos que $\|u_k\|_1 \leq 1/k$, por lo que deducimos que $u_k \to 0$ en $L^1(U)$. Entonces, $u = 0$.
Por otro lado observamos que $\|u_k\|_2 = 1$ para todo k,e donde sigue que $\|u\|_2 = 1$ ya que $u_k \to u$ en $L^2(U)$. Esto contradice que $u = 0$.

Referencias

[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2 edition, 2003.
[2] J. Fernández Bonder. *Ecuaciones Diferenciales Parciales.* Departamento de Matemática, FCEN-UBA, 2015.
[3] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.
[4] L. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2010.