Ecuaciones diferenciales A/B - 2020 (segundo cuatrimestre)
Docentes: Nicolás Saintier - Andrea Ceretani - Martín Completa
Universidad de Buenos Aires

MATERIAL COMPLEMENTARIO

TEMA: ECUACIÓN DE ONDAS

Teorema 1 (ver [1]).
Sean $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$. El siguiente problema para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde $c > 0$ está dado, admite una única solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, la cual está definida por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \quad (1)$$

La expresión (1) se conoce como "fórmula de D'Alembert".

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) &= 0 && x > 0,\ t > 0, && (2) \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) &= h(x) && x > 0, && (3) \\ u(0,t) &= f(t) && t > 0, && (4) \end{aligned}$$

donde $f \in C^2(D)$, $g \in C^2(D)$ y $h \in C^1(D)$, siendo $D = [0, \infty)$.

1. Sean $G \in C^2(\mathbb{R})$ y $H \in C^1(\mathbb{R})$ funciones impares. Verificar que la solución $U \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ del problema:

$$\begin{aligned} U_{tt}(x,t) - c^2 U_{xx}(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R},\ t > 0, && (5) \\ U(x,0) = G(x), \quad U_t(x,0) &= H(x) && x \in \mathbb{R}, && (6) \end{aligned}$$

   satisface $U(0,t) = 0$ para todo $t > 0$.

2. Usar el ítem anterior para hallar una solución del problema (2)-(4) suponiendo $f \equiv 0$ y que las funciones g y h satisfacen $g(0) = g''(0) = 0$ y $h(0) = 0$. Dar una fórmula para la solución que sólo dependa de los datos c, g y h.

3. Hallar una solución del problema (2)-(4), pero ahora suponiendo $g \equiv 0$, $h \equiv 0$ y que f es cualquier función que satisface $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

Resolución.

1. Como la solución de (5)-(6) está dada por la fórmula de D'Alembert y las funciones G y H son impares, se tiene:

$$U(0,t) = \frac{1}{2}(G(ct) + G(-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} H(y)\,dy = 0,$$

   para todo $t > 0$.

2. Sean G y H las extensiones impares de g y h al conjunto de los números reales. Como g es C^2 en $[0,\infty)$ y satisface $g(0) = g''(0) = 0$, se tiene que $G \in C^2(\mathbb{R})$. Similarmente, como h es C^1 en $[0,\infty)$ y satisface $h(0) = 0$, resulta $H \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, el problema:

$$\begin{aligned} U_{tt}(x,t) - c^2 U_{xx}(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ U(x,0) = G(x), \quad U_t(x,0) &= H(x) && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

admite una única solución $U \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, la cual está dada por la fórmula de D'Alembert. Además, por lo hecho en el ítem anterior, se satisface $U(0,t) = 0$ para todo $t > 0$.

Definimos u como la restricción de U a $[0,\infty) \times [0,\infty)$. Es inmediato que u satisface (2) y (3). Además, usando que $U(0,t) = 0$ para todo $t > 0$, se tiene que u también satisface (4). Luego u es solución de (2)-(4).

Buscamos ahora una fórmula para u que sólo dependa de los datos del problema. Sean $x \geq 0$ y $t \geq 0$. A partir de la fórmula de D'Alembert para U, obtenemos:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(G(x+ct) + G(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} H(y)\,dy.$$

Si $x - ct \geq 0$, entonces,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy.$$

En cambio, si $x - ct < 0$, resulta:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(g(x+ct) - g(-x+ct)) - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} h(-y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct} h(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}(g(x+ct) - g(-x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{0} h(w)\,dw + \frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct} h(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}(g(x+ct) - g(-x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{x+ct} h(y)\,dy. \end{aligned}$$

Luego,

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy & \text{si} \quad x \geq ct, \\ \frac{1}{2}(g(x+ct) - g(-x+ct)) + \frac{1}{2c}\displaystyle\int_{-x+ct}^{x+ct} h(y)\,dy & \text{si} \quad 0 \leq x < ct. \end{cases}$$

3. El problema (2)-(4) es un modelo simplificado para la vibración de una cuerda con uno de sus extremos fijos, cuya posición y velocidad iniciales están caracterizados por las funciones g y h, y donde la fuerza aplicada en el extremo fijo $x = 0$ está caracterizada por la función f.

Si g y h son nulas, el movimiento de la cuerda es generado sólo por la fuerza aplicada en el extremo fijo, la cual genera una perturbación que "viaja" por la cuerda. Esto sugiere buscar una solución de la forma:

$$u(x,t) = F(x - ct) \qquad x \geq 0,\, t \geq 0,$$

donde $F \in C^2(\mathbb{R})$ es una función a determinar.

Es fácil verificar que cualquier función de la forma propuesta pertenece a $C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$ y satisface la ecuación (2).

Para que se verifique la condición de borde (4), se debe tener $F(-ct) = f(t)$ para todo $t > 0$. Entonces definimos:

$$F(z) = f\left(-\frac{z}{c}\right) \qquad z \leq 0.$$

Notar que no es posible definir F de este modo si $z \geq 0$ puesto que f está definida sólo en $[0,\infty)$.

Para que se verifiquen las condiciones iniciales (3) basta extender F por cero a $\mathbb{R}$. Notar que, como f es C^2 en $[0,\infty)$ y $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, resulta $F \in C^2(\mathbb{R})$.

Resumiendo, hemos obtenido que la función u definida por:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq ct,\, t \geq 0 \\ \\ f\left(-\frac{x}{c} + t\right) & \text{si} \quad 0 \leq x < ct,\, t \geq 0, \end{cases}$$

pertenece a $C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ y es solución de (2)-(4) cuando $g \equiv 0$, $h \equiv 0$ y f satisface $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

Nota. Lo hecho en el Ejercicio 1 permite obtener una solución $C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ del problema (2)-(3) cuando las funciones dato satisfacen las siguientes condiciones:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \qquad g(0) = g''(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad h(0) = 0.$$

Gracias a la linealidad de la ecuación de ondas, dicha solución se obtiene usando el Ejercicio 1 y el principio de superposición. Como consecuencia de la unicidad de solución para el problema (5)-(6), se tiene que la solución hallada es única en $C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

De forma similar se puede determinar la solución del problema (2)-(4) cuando la condición de borde (4) se reemplaza por:

$$u_x(0,t) = f(t) \qquad t > 0.$$

En este caso, para determinar la solución correspondiente a $f \equiv 0$, se trabaja con la extensión par de los datos iniciales. Es fácil verificar que la solución de (5)-(6) satisface $U_x(0,t) = 0$ para todo $t > 0$ si G y H son funciones pares.

TEOREMA 2 (Método de Duhamel, ver [1]).
Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. *El siguiente problema para la ecuación de ondas:*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) && x \in \mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0) &= 0 && x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

admite una única solución $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, *la cual está definida por:*

$$u(x,t) = \int_0^t w^{(s)}(x,t)\,ds \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0, \tag{7}$$

donde, para cada $s>0$, *la función* $w^{(s)}$ *es la solución del problema:*

$$\begin{aligned} w^{(s)}_{tt}(x,t) - \Delta w^{(s)}(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R}^n,\ t>s,\\ w^{(s)}(x,s)=0, \quad w^{(s)}_t(x,s) &= f(x,s) && x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

TEOREMA 3 (ver [1]).
Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *y* $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *El siguiente problema para la ecuación de ondas:*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R}^3,\ t>0,\\ u(x,0)=g(x), \quad u_t(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

admite una única solución $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, *la cual está definida por:*

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} (g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x) + t h(y))\,dS_y \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0. \tag{8}$$

La expresión (8) *se conoce como "fórmula de Kirchhoff".*

EJEMPLO 2.
Deducir la siguiente fórmula explícita:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{B_t(x)} \frac{f(y,t-|x-y|)}{|x-y|}\,dy \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0, \tag{9}$$

para la solución $C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ del problema:

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0, \tag{10}$$

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0 \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{11}$$

suponiendo $f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$.

Resolución. Siguiendo el método de Duhamel, sabemos que la función u definida por:

$$u(x,t) = \int_0^t w^{(s)}(x,s)\,ds \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0, \tag{12}$$

es la solución en $C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$, donde, para cada $s>0$, la función $w^{(s)}$ resuelve

$$w_{tt}^{(s)}(x,t) - \Delta w^{(s)}(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > s, \tag{13}$$

$$w^{(s)}(x,s) = 0, \quad w_t^{(s)}(x,s) = f(x,s) \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{14}$$

Vamos a deducir la fórmula (9) a partir de hallar la solución explícita de cada problema (13)-(14).

Sea $s>0$. Es fácil verificar que $w^{(s)}$ es solución de (13)-(14) si y sólo si la función $v^{(s)}$ definida por $v^{(s)}(x,t) = w^{(s)}(x,t+s)$ para $x \in \mathbb{R}^3$ y $t \geq 0$ es solución de:

$$v_{tt}^{(s)}(x,t) - \Delta v^{(s)}(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \tag{15}$$

$$v^{(s)}(x,0) = 0, \quad v_t^{(s)}(x,0) = f(x,s) \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{16}$$

Usando la fórmula de Kirchhoff, obtenemos que la solución $v^{(s)}$ de (15)-(16) está dada por:

$$v^{(s)}(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} t f(y,s)\, dS_y = \frac{1}{|\partial B_t(x)|}\int_{\partial B_t(x)} t f(y,s)\, dS_y \tag{17}$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(x)} f(y,s)\, dS_y \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0. \tag{18}$$

En el cálculo anterior hemos usado que $|\partial B_t(x)| = 4\pi t^2$.

Luego,

$$w^{(s)}(x,t) = v^{(s)}(x,t-s) = \frac{1}{4\pi(t-s)}\int_{\partial B_{t-s}(x)} f(y,s)\, dS_y \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > s. \tag{19}$$

Reemplazando (19) en (12) y haciendo la sustitución $r = t-s$, obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial B_{t-s}(x)} \frac{f(y,s)}{t-s}\, dS_y\, ds \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial B_r(x)} \frac{f(y,t-r)}{r}\, dS_y\, dr \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{B_t(x)} \frac{f(y,t-|x-y|)}{|x-y|}\, dy \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0. \end{aligned}$$

Referencias

[1] J. Fernández Bonder. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Departamento de Matemática, FCEN-UBA, 2015.