Ecuaciones diferenciales A/B - 2020 (segundo cuatrimestre)
Docentes: Nicolás Saintier - Andrea Ceretani - Martín Completa
Universidad de Buenos Aires

MATERIAL COMPLEMENTARIO
TEMA: TRANSFORMADA DE FOURIER

En todo lo que sigue, las funciones se consideran a valores complejos.

Definición 1 (Transformada de Fourier, ver [1]).
Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier de f es la función $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2i\pi x\cdot y}\, dx.$$

Aquí, i es la unidad imaginaria y $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ para $z \in \mathbb{R}$.

El operador que a cada función le asigna su transformada de Fourier se anota $\mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F}f = \hat{f}$.

Teorema 1 (ver [1] y [2]).
La función $G : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$G(x,t) = t^{-n/2} e^{-\pi|x|^2/t}, \tag{1}$$

tiene la siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G(x,t)\, dx = 1$ *para todo* $t > 0$.
2. $\displaystyle\int_{|x|\geq\delta} G(x,t)\, dx \to 0$ *si* $t \to 0^+$, *para todo* $\delta > 0$.
3. $G(y-\alpha,t) = \mathcal{F}(x \mapsto e^{2i\pi x\cdot\alpha} e^{-t\pi|x|^2})(y)$ *para todo* $y, \alpha \in \mathbb{R}^n$ *y todo* $t > 0$.

La función $K : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$K(x,t) = G(x, 4\pi t),$$

se conoce como *núcleo del calor*.

Ejemplo 1.
Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tiene "crecimiento moderado" si es continua y existe una constante $A > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+|x|^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Notar que si f tiene crecimiento moderado entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y por lo tanto tiene sentido considerar su transformada de Fourier $\hat{f}$.

1. (Fórmula de multiplicación) Si f y g tienen crecimiento moderado entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)\,dx.$$

2. (Fórmula de inversión) Si f y $\hat{f}$ tienen crecimiento moderado entonces:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy}\,dy \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Demostración.

1. Comenzamos escribiendo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2i\pi xy}\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{-2i\pi xy}\,dy\,dx. \tag{3}$$

Definimos $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ por:

$$F(x,y) = f(x)g(y)e^{-2i\pi xy}.$$

Usando que:

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|\,dx \leq |g(y)|\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = |g(y)|\|f\|_1 \qquad \forall\, y \in \mathbb{R},$$

obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|\,dx\right)dy \leq \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy = \|f\|_1\|g\|_1.$$

Luego, $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (teorema de Tonelli) y por lo tanto es posible intercambiar el orden de integración (teorema de Fubini) en la última integral en (3). De este modo, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y)\,dy.$$

2. Vamos a probar que:

$$f * G(\cdot,t) \to f \qquad \text{puntualmente en } \mathbb{R} \quad \text{si} \quad t \to 0, \tag{4}$$

donde G es la función definida por (1). Esto, junto con la propiedad (ver Práctica 3):

$$G(y-x,t) = \hat{v}(y) \qquad \text{para} \quad v(z) = e^{2i\pi xz}e^{-t\pi z^2},$$

y la fórmula de multiplicación demostrada en el ítem anterior, nos dará el resultado que buscamos. En efecto, para $x \in \mathbb{R}$ se tendrá:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(y)G(x-y,t)\,dy = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(y)G(y-x,t)\,dy \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{v}(y)\,dy = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)v(y)\,dy \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy}e^{-t\pi y^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy} \lim_{t\to 0} e^{-t\pi y^2}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy}\,dy. \end{aligned}$$

El intercambio del límite con la integral sigue del teorema de la convergencia dominada, ya que:

i) $\lim_{t\to 0} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy}e^{-t\pi y^2} = \hat{f}(y)e^{2i\pi xy}$ para todo $y \in \mathbb{R}$,

ii) $|\hat{f}(y)e^{2i\pi xy}e^{-t\pi y^2}| \leq |\hat{f}(y)|$ para todo $y \in \mathbb{R}$, siendo $|\hat{f}|$ integrable en $\mathbb{R}$.

Veamos entonces que vale (4). Para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ dados, se tiene (ver Teorema 1):

$$\begin{aligned} |(f * G(\,\cdot\,,t))(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)G(y,t)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}} G(y,t)\,dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|G(y,t)\,dy. \end{aligned}$$

Ahora consideramos $\varepsilon > 0$ y observamos que, por la continuidad de f en x, existe $\delta = \delta(x)$ tal que:

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad |y| < \delta.$$

Además, notamos que $|f(x)| \leq A$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} &|(f * G(\,\cdot\,,t))(x) - f(x)| \\ &\quad \leq \int_{|y|<\delta} |f(x-y) - f(x)|G(y,t)\,dy + \int_{|y|>\delta} |f(x-y) - f(x)|G(y,t)\,dy \\ &\quad \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} G(y,t)\,dy + 2A\int_{|y|>\delta} G(y,t)\,dy \\ &\quad = \varepsilon + 2A\int_{|y|>\delta} G(y,t)\,dy. \end{aligned}$$

Haciendo $t \to 0$ obtenemos:

$$\limsup_{t\to 0} |(f * G(\,\cdot\, t))(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

De la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, sigue que vale (4).

Ejemplo 2.

1. Sea $a > 0$. La función f definida por $f(x) = e^{-a|x|}$ tiene crecimiento moderado y su transformada de Fourier está dada por:

$$\hat{f}(y) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi y)^2} \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

2. Para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(zx)}{a^2 + z^2}\, dz = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|}. \tag{6}$$

Demostración.

1. Para ver que f tiene crecimiento moderado basta observar que

$$(1 + x^2)e^{-a|x|} \to 0 \qquad \text{si} \quad |x| \to \infty.$$

Un cálculo directo muestra que la transformada de Fourier de f está dada por (5). En efecto, para $y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-2i\pi xy}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(-2i\pi y + a)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-2i\pi y - a)x}\, dx \\
&= \left. \frac{e^{(-2i\pi y + a)x}}{-2i\pi y + a} \right|_{-\infty}^{0} + \left. \frac{e^{(-2i\pi y - a)x}}{-2i\pi y - a} \right|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{-2i\pi y + a} + \frac{1}{2i\pi y + a} \\
&= \frac{2a}{a^2 + (2\pi y)^2}.
\end{aligned}$$

2. Como f y $\hat{f}$ tienen crecimiento moderado, vale la fórmula de inversión (ver (2) en el Ejercicio 1-2). Entonces,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int \hat{f}(y) e^{2i\pi xy}\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{2a}{a^2 + (2\pi y)^2} \right) e^{2i\pi xy}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{2a\cos(2\pi xy)}{a^2 + (2\pi y)^2}\, dy + i \int_{\mathbb{R}} \frac{2a\sin(2\pi xy)}{a^2 + (2\pi y)^2}\, dy.
\end{aligned}$$

Observando que f es una función a valores reales, resulta:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2a\cos(2\pi xy)}{a^2 + (2\pi y)^2}\, dy = e^{-a|x|}.$$

Haciendo el cambio de variables $2\pi y = z$ se obtiene (6).

Definición 2 (Clase de Schwartz: Funciones de decrecimiento rápido, ver [1]). *Se define la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^k)|D^\alpha f(x)| < \infty \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{N}_0 \textit{ y todo multi-índice } \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Teorema 2 (ver [1]).
Para todo $1 \leq p \leq \infty$ *se tiene* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3 (Identidad de Plancherel, ver [1]).
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Ejemplo 3.
Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ son funciones a valores reales, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\hat{g}(y)\,dy. \tag{7}$$

Demostración. Primero observamos que $f+g, f-g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, usando la identidad de Plancherel para $f+g$ y $f-g$, obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f^2 + 2fg + g^2)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}^2 + 2\hat{f}\hat{g} + \hat{g}^2)\,dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} (f^2 - 2fg + g^2)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}^2 - 2\hat{f}\hat{g} + \hat{g}^2)\,dx.$$

Restando miembro a miembro estas igualdades (7).

Definición 3 (Antitransformada de Fourier, ver [1]).
Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *La antitransformada de Fourier de* f *es la función* $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definida por:*

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{2i\pi x\cdot y}\,dx.$$

El operador que a cada función le asigna su antitransformada de Fourier se anota $\mathcal{F}^{-1}$. Así, $\mathcal{F}^{-1} f = \check{f}$.

Teorema 4 (La transformada de Fourier en la clase de Schwartz, ver [1]).
El operador $\mathcal{F}$ *es una biyección de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *en* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *y su inversa es* $\mathcal{F}^{-1}$.

Más generalmente, si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ (ver slides de teoría).

Teorema 5 (ver [1]).
Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\,\hat{g}$.

Ejemplo 4.
Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Veamos primero que $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Como $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $fg \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Consideramos ahora $j \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Usando la fórmula de Leibniz, obtenemos:

$$D^\alpha fg = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g,$$

donde $\beta \le \alpha$ se entiende componente a componente y

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \qquad \text{donde} \quad \gamma! = \gamma_1! \dots \gamma_n! \quad \text{para} \quad \gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Combinando esto con que $D^{\alpha-\beta} g \in \mathcal{S} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para cada $\beta \le \alpha$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^j) |D^\alpha fg(x)| &\le \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^j) |D^\beta f(x)| |D^{\alpha-\beta} g(x)| \\ &\le \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|D^{\alpha-\beta} g\|_\infty \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^j) |D^\beta f(x)|. \end{aligned}$$

Notando que la suma sobre $\beta \le \alpha$ es finita y usando que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^j) |D^\alpha fg(x)| < \infty.$$

Luego, $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Veamos ahora que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Primero, observamos que

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

ya que $\hat{f}$, $\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

dado que $\mathcal{F}$ es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, notamos que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f * g) = f * g$ ya que tanto $f * g$ como su transformada $\hat{f}\hat{g}$ pertenecen a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Otra forma de probar que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es comprobando mediante un cálculo directo que $f * g$ es la antitransformada de Fourier de una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, como veremos a continuación. Para $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \hat{\hat{h}}(y)\, dy,$$

donde $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ está definida por $h(y) = g(x + y)$. Para obtener la segunda igualdad hemos usado que $\hat{\hat{h}}(y) = h(-y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, ya que $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ver Práctica 3). Usando ahora la fórmula de multiplicación (ver Ejemplo 1) junto con que $\hat{h}(y) = \hat{g}(y) e^{2i\pi x \cdot y}$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ (ver Práctica 3), obtenemos:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \hat{g}(y) e^{2i\pi x \cdot y}\, dy = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g})(x).$$

Sólo resta observar que $\hat{f}\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ya que $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 6 (ver [1]).
Sean $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Si $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces:

$$\mathcal{F}\left(\partial_{x_j} f\right)(y) = 2i\pi y_j \hat{f}(y) \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Como consecuencia, si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ es tal que $f, \partial_{x_j} f, \partial^2_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces:

$$\mathcal{F}\left(\partial^2_{x_j} f\right)(y) = (2i\pi y_j)^2 \hat{f}(y) = -4\pi^2 y_j^2 \hat{f}(y) \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo 5.
Usar el método de la transformada de Fourier para hallar una solución explícita del siguiente problema de valores iniciales para la ecuación del calor:

$$u_t = \Delta u \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \qquad u = f \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\}, \tag{8}$$

donde $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Resolución. La estrategia que seguiremos consiste en determinar una solución formal explícita y luego verificar que la misma resuelve el problema.

Notación: Para $t \geq 0$ fijo, anotamos $\mathcal{F}(v(\cdot, t))$ simplemente como $\hat{v}(\cdot, t)$.

Paso 1 (solución formal). Suponemos que existe una solución u. Aplicando la transformada de Fourier miembro a miembro de la ecuación del calor para cada $t > 0$ fijo, obtenemos:

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Y aplicando la transformada de Fourier miembro a miembro de la condición inicial, obtenemos:

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Así, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, se tiene el siguiente problema de valores iniciales para $\hat{u}(\xi, \cdot)$:

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) \qquad t > 0, \qquad\qquad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

Resolviendo este problema, obtenemos:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0. \tag{9}$$

Usando ahora que $e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} = \hat{K}(\xi, t)$ para $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$ fijo, donde K es el núcleo del calor (ver Teorema 1-3), vemos que:

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}(f * K(\,\cdot\,, t))(\xi) \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Aplicando la antitransformada de Fourier miembro a miembro de la última expresión para $t > 0$ fijo, obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-|x-z|^2/4t}\, dz \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \tag{10}$$

Paso 2 (análisis de la solución formal). Vamos a probar ahora que, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la función definida por (10) satisface la ecuación del calor y converge uniformemente a f si $t \to 0$. Entonces, extendiendo la definición de u a $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ por $u(\cdot, 0) = f$, se tiene que u resuelve el problema. Además, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Primero observamos que para todo $t > 0$ se tiene $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ya que $u(\cdot, t)$ es la convolución de dos funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En particular, esto implica que u está bien definida en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Usando que $\mathcal{F}$ es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con inversa $\mathcal{F}^{-1}$, obtenemos:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{K}(\xi,t)e^{2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0. \tag{11}$$

Definimos la función $F : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,t,\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{K}(\xi,t)e^{2i\pi\xi\cdot x},$$

y observamos que F tiene las siguientes propiedades:

i) Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $F(\,\cdot\,, \cdot\,, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$.

ii) Para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, $F(x, t, \,\cdot\,)$ es medible.

iii) Para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y todo multi-índice α, se tiene:

$$D_x^\alpha \partial_t^k F(t,x,\xi) = (2i\pi\xi)^\alpha(-4\pi^2|\xi|^2)^k \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}e^{2i\pi\xi\cdot x} \qquad x, \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0.$$

En particular, a partir de iii) se obtiene:

$$|D_x^\alpha \partial_t^k F(t,x,\xi)| \leq (2\pi|\xi|)^{|\alpha|+2k}|\hat{f}(\xi)| \qquad x, \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,$$

siendo $\xi \mapsto |\xi|^{|\alpha|+2k}|\hat{f}(\xi)|$ integrable en $\mathbb{R}^n$ ya que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Entonces, usando el teorema de la convergencia dominada obtenemos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ y que sus derivadas se obtienen derivando bajo el signo integral. Además,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \lim_{t\to 0} \hat{K}(\xi,t)e^{2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi = f(x),$$

ya que $\lim_{t\to 0} \hat{K}(\xi,t) = 1$. Finalmente, observamos que:

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)(\partial_t\hat{K}(\xi,t))e^{2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{K}(\xi,t)\left(-4\pi^2|\xi|^2 e^{2i\pi\xi\cdot x}\right)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{K}(\xi,t)\left(\Delta_x e^{2i\pi\xi\cdot x}\right)\, d\xi \\
&= \Delta u(x,t),
\end{aligned}$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Referencias

[1] J. Fernández Bonder. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Departamento de Matemática, FCEN-UBA, 2015.
[2] R. Shakarchi E. Stein. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press - Princeton and Oxford, 2002.
[3] L. Ward M. C. Pereyra. *Harmonic Analysis. From Fourier to Wavelets*. American Mathematical Society. Institute for Advances Studies., 2012.