Ecuaciones diferenciales A/B - 2020 (segundo cuatrimestre)
Docentes: Nicolás Saintier - Andrea Ceretani - Martín Completa
Universidad de Buenos Aires

MATERIAL COMPLEMENTARIO

TEMA: ECUACIONES DE LAPLACE Y DE POISSON

Teorema 1 (Principio fuerte del máximo para funciones armónicas, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y conexo. Si u es armónica en U y existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$ entonces u es constante en U.

Teorema 2 (Analiticidad de las funciones armónicas, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si u es armónica en U entonces u es analítica en U.

Ejemplo 1.
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, y u armónica en U.

1. Si $D^\alpha u(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in U$ para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, entonces $u = 0$ en U.

2. Si u admite un máximo o un mínimo *local* en U entonces u es constante en U.

Demostración.

1. Sea $A = \{x \in U \, : \, D^\alpha u(x) = 0 \text{ para todo multi-índice } \alpha\}$.

   Notar que $A \neq \emptyset$ ya que $x_0 \in A$. A continuación vamos a verificar que A es abierto y cerrado, lo cual implicará que $A = U$ ya que U es conexo. Esto junto con la analiticidad de u nos dará que u se anula en U.

   Veamos primero que A es cerrado. Para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que la preimagen de $\{0\}$ a través de $D^\alpha u$ es cerrada ya que $\{0\}$ es cerrado y $D^\alpha u$ es continua. Observando ahora que A es la intersección de las preimágenes de $\{0\}$ a través de cada $D^\alpha u$, sigue que A es cerrado.

   Veamos ahora que A es abierto. Para ello consideramos $x \in A$ y observamos que, como u es analítica en U, existe un entorno $W \subset U$ de x tal que la serie de Taylor alrededor de x converge puntualmente a u en W, es decir,

   $$u(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!}(y - x)^\alpha \qquad \forall \, y \in W.$$

   Usando que $x \in A$, vemos que $u = 0$ en W así que $D^\alpha u = 0$ en W para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Luego $W \subset A$, de donde sigue que A es abierto.

2. Sea $x_0 \in U$ un punto donde u alcanza un máximo o un mínimo local. Entonces existe una bola B centrada en x_0 tal que $u(x_0) = \max_{\bar{B}} u$ o $u(x_0) = \min_{\bar{B}} u$. Luego, por el principio fuerte del máximo/mínimo, se tiene que $u = u(x_0)$ en B. Entonces $D^\alpha(u - u(x_0)) = 0$ en B para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y por lo tanto $u = u(x_0)$ en U, ver ítem 1, lo cual prueba que u es constante en U.

Definición 1 (Funciones sub y super armónicas).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $u \in C(U)$ se dice subarmónica (resp. superarmónica) en U si para cada bola $B \subset\subset U$ y para cada función h armónica en B que satisface $u \leq h$ ($u \geq h$) en ∂B, se tiene que $u \leq h$ ($u \geq h$) en B.

Teorema 3 (Principio débil del máximo para funciones subarmónicas, ver Práctica 2).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si $u \in C(\bar{U})$ es subarmónica en U entonces $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$.

Teorema 4 (Caracterización de funciones sub y super armónicas suaves, ver Práctica 2).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $u \in C^2(U)$ es subarmónica (resp. superarmónica) en U si y sólo si $-\Delta u \leq 0$ ($-\Delta u \geq 0$) en U.

Ejemplo 2.
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si $u, v \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ son tales que:

$$\Delta u \geq \Delta v \quad \text{en} \quad U, \qquad u \leq v \quad \text{sobre} \quad \partial U,$$

entonces $u \leq v$ en U.

Demostración. Definimos $w = u - v$. Como $w \in C^2(U)$ y $\Delta w \geq 0$ en U, se tiene que w es subarmónica en U. Además, como U es acotado y $w \in C(\bar{U})$, sabemos por el principio débil del máximo que $\max_{\bar{U}} w = \max_{\partial U} w$. Usando ahora que $w \leq 0$ sobre ∂U obtenemos que $u \leq v$ en U.

Nota. Este resultado nos permite comparar funciones sub y super armónicas suaves en un conjunto abierto y acotado U a partir de conocer cómo se relacionan en ∂U: Si $u, v \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ son, respectivamente, sub y super armónicas en U entonces $\Delta u \geq 0 \geq \Delta v$ en U. Luego, si $u \leq v$ en ∂U, sigue que $u \leq v$ en U.

Teorema 5 (Teorema del valor medio para funciones armónicas, ver [1]).
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u \in C^2(U)$. Si u es armónica en U entonces para todo $x \in U$ se tiene:

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy = \fint_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma \qquad \text{para toda bola} \quad B_r(x) \subset\subset U.$$

Teorema 6 (ver Práctica 2).
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u \in C(U)$. Si u es subarmónica en U entonces para todo $x \in U$ se tiene:

$$u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy \qquad \text{para toda bola} \quad B_r(x) \subset\subset U.$$

Vale el mismo resultado reemplazando $\fint_{B_r(x)} u(y)\, dy$ por $\fint_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma$.

EJEMPLO 3.
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $u \in C(U)$ es subarmónica en U si y sólo para cada $x \in U$ existe $r_x \in (0, \infty]$ tal que:

$$u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy \qquad \text{para todo} \quad r \in (0, r_x) \quad \text{con} \quad B_r(x) \subset\subset U. \tag{1}$$

Demostración. Si u es subarmónica en U entonces para cada $x \in U$ se tiene que (1) se verifica para $r_x = \infty$ (ver Teorema 6). Veamos ahora que también vale la recíproca.

Sea h armónica en una bola $B \subset\subset U$ y tal que $u \leq h$ sobre ∂B. Definimos $w = u - h$ en B y observamos que <u>si</u> vale el principio débil del máximo para w en B entonces $\max_{\bar{B}} w = \max_{\partial B} w$. Luego, $u \leq h$ en B y por lo tanto se tiene que u es subarmónica en U. A continuación vamos a probar que, más aún, vale un principio fuerte del máximo para w en B.

Suponemos que existe $x_0 \in B$ tal que $w(x_0) = \max_{\bar{B}} w$ y consideramos el conjunto $A = \{x \in B : w(x) = M\}$, donde $M = w(x_0)$. Como $x_0 \in A$, resulta $A \neq \emptyset$. Si probamos que A es abierto y cerrado tendremos que $A = B$ (la bola es conexa) y por lo tanto tendremos que w es constante en $\bar{B}$.

Observando que $A = w^{-1}(\{M\})$ y que w es continua en B, vemos que A es cerrado.

Consideramos ahora $x \in A$ y $B_r(x) \subset\subset B$ donde $r \in (0, r_x)$. Usando el teorema del valor medio para h junto con (1), obtenemos:

$$M = w(x) \leq \fint_{B_r(x)} w(y)\, dy \leq \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} M\, dy = M.$$

Luego,

$$0 = M - \fint_{B_r(x)} w(y)\, dy = \fint_{B_r(x)} (M - w(y))\, dy,$$

y por lo tanto $w = M$ en $B_r(x)$. En consecuencia, $B_r(x) \subset A$, de donde sigue que A es abierto.

Nota. Teniendo en cuenta que la opuesta de una función superarmónica es subarmónica, surge de lo anterior que $u \in C(U)$ es superarmónica en U si y sólo para cada $x \in U$ existe existe $r_x \in (0, \infty]$ tal que

$$u(x) \geq \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy \qquad \text{para todo} \quad r \in (0, r_x) \quad \text{con} \quad B_r(x) \subset\subset U.$$

Entonces, si para cada $x \in U$ la función $u \in C(U)$ satisface:

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy \qquad \text{para todo} \quad r \in (0, r_x) \quad \text{con} \quad B_r(x) \subset\subset U,$$

para algún $r_x \in (0, \infty]$, se tiene que u es sub y super armónica en U, de lo que sigue que u es armónica en U (ejercicio).

Ejemplo 4.
Sean $B \subset \mathbb{R}^n$ la bola unitaria centrada en el origen y $u \in C(B^+ \cup \Gamma_0)$ armónica en B^+ tal que $u = 0$ sobre Γ_0, donde:

$$B^+ = \{x \in B : x_n > 0\}, \qquad \Gamma_0 = \{x \in B : x_n = 0\}.$$

La función U definida por:

$$U(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x_n \geq 0, \\ -u(x', -x_n) & \text{si} \quad x_n < 0, \end{cases}$$

es armónica en B.

Demostración. Notar que $U \in C(B)$ ya que $u \in C(B^+)$ y u se anula en Γ_0.

Para $x \in B$ definimos:

$$r_x = |x_n| > 0 \quad \text{si} \quad x \in B^+ \cup B^-, \qquad r_x = \infty \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_0,$$

donde $B^- = \{x \in B : x_n < 0\}$. A continuación vamos a probar que:

$$U(x) = \fint_{B_r(x)} U(y)\, dy \qquad \text{para todo} \quad r \in (0, r_x) \quad \text{con} \quad B_r(x) \subset\subset B, \tag{2}$$

de lo que seguirá que U es armónica en B (ver nota al final del Ejemplo 3).

Sean $x \in B$ y $r \in (0, r_x)$ tales que $B_r(x) \subset\subset B$.

<u>Si $x \in B^+$</u> entonces:

$$\fint_{B_r(x)} U(y)\, dy = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy = u(x) = U(x),$$

ya que u es armónica en B^+ y la elección de r_x asegura que $B_r(x) \subset\subset B^+$.

<u>Si $x \in B^-$</u> resulta $B_r(x) \subset\subset B^-$ y por lo tanto:

$$\fint_{B_r(x)} U(y)\, dy = -\fint_{B_r(x)} u(y', -y_n)\, dy.$$

Haciendo el cambio de variables $z = (z', z_n) = (y', -y_n)$, se obtiene:

$$\fint_{B_r(x)} U(y)\, dy = -\fint_{B_r(x', -x_n)} u(z)\, dz = -u(x', -x_n) = U(x).$$

ya que $B_r(x', -x_n) \subset\subset B^+$.

<u>Si $x \in \Gamma_0$</u>, se tiene:

$$\begin{aligned} \fint_{B_r(x)} U(y)\, dy &= \fint_{B_r(x) \cap B^+} U(y)\, dy + \fint_{B_r(x) \cap B^-} U(y)\, dy \\ &= \fint_{B_r(x) \cap B^+} u(y)\, dy - \fint_{B_r(x) \cap B^-} u(y', -y_n)\, dy. \end{aligned}$$

Haciendo el mismo cambio de variables que antes en la última integral y teniendo en cuenta que $x_n = 0$, obtenemos:

$$\fint_{B_r(x)} U(y)\, dy = \fint_{B_r(x) \cap B^+} u(y)\, dy - \fint_{B_r(x) \cap B^+} u(z')\, dz = 0 = U(x).$$

Nota. Se puede hacer otra prueba usando la integral de Poisson (ejercicio).

Definición 2 (Autovalores y autofunciones).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$, u no idénticamente nula, son tales que:

$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial U, \tag{3}$$

entonces se dice que λ es un autovalor del problema de Dirichlet homogéneo para el operador $-\Delta$, y que u es una autofunción asociada.

Teorema 7 (Unicidad para el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson, ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Existe a lo sumo una función $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ que satisface

$$\Delta u = f \qquad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u = g \qquad \text{sobre} \quad \partial U.$$

Teorema 8 (Fórmula de Green, ver Práctica 0). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con frontera ∂U de clase C^1.*
1. Si $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ y $v \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$, entonces:

$$\int_U (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial U} v \partial_{\mathbf{n}} u \, dS.$$

2. Si $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, entonces:

$$\int_U (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial U} (v\partial_{\mathbf{n}} u - u\partial_{\mathbf{n}} v)\; dS.$$

Aquí, $\partial_{\mathbf{n}} u := \nabla u \cdot \mathbf{n}$ y $\mathbf{n}$ es el campo vectorial normal exterior unitario a ∂U.

Ejemplo 5.
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1.

1. Si λ es un autovalor del problema de Dirichlet homogéneo para $-\Delta$, entonces $\lambda > 0$.

2. Si u y v son autofunciones asociadas a autovalores diferentes del problema de Dirichlet homogéneo para $-\Delta$, entonces $\int_U uv\, dx = 0$. Es decir, u y v son ortogonales en $L^2(U)$.

Demostración.

1. Sea λ un autovalor del problema de Dirichlet homogéneo para $-\Delta$, y sea u una autofunción asociada. Usando la primera fórmula de Green, se obtiene:

$$\int_U |\nabla u|^2\, dx = \int_U \nabla u \cdot \nabla u\, dx = \int_{\partial U} u\partial_{\mathbf{n}} u\, dS - \int_U u\Delta u\, dx = \lambda \int_U u^2\, dx,$$

de donde sigue que $\lambda \geq 0$. Veamos ahora que $\lambda > 0$.

Supongamos, por el contrario, que $\lambda = 0$. Entonces u es solución de

$$\Delta u = 0 \qquad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial U,$$

y por lo tanto es la función nula, lo cual es una contradicción.

2. Sean u y v autofunciones del problema de Dirichlet homogéneo para $-\Delta$ correspondientes a autofunciones λ y μ, respectivamente, donde $\lambda \neq \mu$. Usando la segunda fórmula de Green, obtenemos:

$$(\mu - \lambda) \int_U vu\, dx = \int_U (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial U} (v\partial_{\mathbf{n}} u - u\partial_{\mathbf{n}} v)\ dS = 0.$$

Usando ahora que $\lambda \neq \mu$, sigue que $\displaystyle\int_U vu\, dx = 0$.

Referencias

[1] J. Fernández Bonder. *Ecuaciones Diferenciales Parciales.* Departamento de Matemática, FCEN-UBA, 2015.