# MATERIAL COMPLEMENTARIO

## TEMA: SERIES DE FOURIER Y SEPARACIÓN DE VARIABLES

Teorema 1 (Test M de Weierstrass, ver [1]).
*Sea* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones definidas en* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Si existe* $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *tal que:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$,
2. $|f_k(x)| \leq M_k$ *para todo* $x \in U$ *y todo* $k \in \mathbb{N}$,

*entonces* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *converge uniformemente en* $U$.

Teorema 2 (ver [1]).
*Sea* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones continuas en* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \quad \text{converge uniformemente a} \quad f \quad \text{en} \quad U,$$

*entonces* $f$ *es continua en* $U$.

Teorema 3 (ver [1]).
*Sea* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones derivables en* $[a,b]$. *Si*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) < \infty$ *para algún* $x_0 \in [a,b]$,
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ *converge uniformemente en* $[a,b]$,

*entonces* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *converge uniformemente en* $[a,b]$ *a una función* $f$ *derivable en* $[a,b]$ *y se verifica:*

$$f' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'.$$

Ejemplo 1.
Considerar el siguiente problema para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= c^2 u_{xx}(x,t) & & 0 < x < \ell,\ t > 0, \quad (1)\\
u(0,t) &= 0, \qquad u(\ell,t) = 0 & & t \geq 0, \quad (2)\\
u(x,0) &= f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x) & & 0 \leq x \leq \ell. \quad (3)
\end{aligned}$$

1. Hallar una solución formal mediante el método de separación de variables.

2. Determinar condiciones sobre las funciones $f$ y $g$ para que la solución hallada en el ítem 1. resuelva el problema. Qué regularidad tiene la solución?

*Nota.* El problema (1)-(2)-(3) describe las vibraciones de una cuerda cuyos extremos están fijos. En este modelo se supone que la cuerda es flexible y que sus extremos están fijos y separados por una distancia $\ell$. Naturalmente, los puntos de la cuerda se identifican con los puntos del segmento $[0, \ell]$ siendo $x = 0$ y $x = \ell$ los extremos fijos. Se supone, además, que la cuerda sólo experimenta vibraciones en la dirección transversal al eje que determinan sus extremos y que el desplazamiento de un punto $x \in (0, \ell)$ en el instante $t$ respecto de dicho eje está dado por $u(x, t)$. En otras palabras, $u(\cdot, t)$ describe la posición de la cuerda en el instante $t$. La función $f$ representa la posición inicial de la cuerda y la función $g$ representa la componente transversal de la velocidad inicial (la componente tangencial es nula). En este modelo se supone que la cuerda vibra libremente como consecuencia de la perturbación inicial de su posición de equilibrio, caracterizada por las funciones $f$ y $g$. Esto se refleja en el hecho que la ecuación diferencial que gobierna el movimiento es homogénea. Este tipo de movimiento se conoce como vibración *libre* de la cuerda y se diferencia de la vibración *forzada*, caso en el cual se supone la acción de alguna fuerza sobre la cuerda en todo momento. Esto último suele modelarse incorporando un término (conocido) en la ecuación que gobierna el movimiento, por lo que ésta resulta ser no homogénea. La constante $c > 0$ (*wave speed*) depende del sistema en estudio (por ejemplo, de la densidad y tensión de la cuerda), y en modelos más realistas es reemplazada por una función que depende de $(x, t)$ a través de $u$, $c = c(u)$, lo cual convierte al problema en uno no lineal. Como ejemplo de este tipo de problemas puede pensarse en el movimiento de la cuerda de una guitarra que se toca mientras se interpreta una canción. En este caso, el sonido percibido por el oído es consecuencia de las vibraciones que el movimiento de la cuerda provoca en el aire. Para más detalles ver, por ejemplo, [2].

*Resolución.*

1. *Paso 1.* Suponemos que el problema admite una solución no nula $u$ de la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad 0 \leq x \leq \ell,\, t \geq 0. \tag{4}$$

Como $u$ satisface la ecuación (1), se tiene:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \qquad 0 < x < \ell,\, t > 0.$$

Dividiendo formalmente miembro a miembro por $u = XT$, obtenemos:

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad 0 < x < \ell,\, t > 0. \tag{5}$$

El lado izquierdo de (5) depende sólo de $t$ y el derecho, sólo de $x$. Entonces, debe existir una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \qquad 0 < x < \ell,\, t > 0. \tag{6}$$

Como $u$ verifica las condiciones de borde (2), resulta:

$$X(0)T(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad X(l)T(t) = 0 \qquad t \geq 0,$$

de donde se tiene:

$$X(0) = X(\ell) = 0. \tag{7}$$

Combinando (6) con (7) obtenemos que $X$ es solución del siguiente problema de contorno:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad\qquad 0 < x < \ell, \tag{8}$$
$$X(0) = X(\ell) = 0, \tag{9}$$

y que $T$ verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$T''(t) - \lambda\, c^2\, T(t) = 0 \qquad t > 0. \tag{10}$$

*Paso 2.* Buscamos primero los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales (8)-(9) admite soluciones no nulas y la correspondiente fórmula explícita para estas soluciones. Luego, buscamos la solución general de (10) para los valores de $\lambda$ hallados.

Si $\underline{\lambda = 0}$ entonces la ecuación $X'' - \lambda X = 0$ se reduce a $X'' = 0$, cuya solución general está dada por $X(x) = Ax + B$. Para que se cumplan las condiciones de contorno $X(0) = X(\ell) = 0$ se debe verificar $B = 0$ y $A\ell + B = 0$, de donde surge que $A = B = 0$. Luego $X$ es la función nula y por lo tanto $u$ también lo es. Descartamos $\lambda = 0$.

Si $\underline{\lambda > 0}$ el polinomio característico de la ecuación $X'' - \lambda X = 0$, $p(w) = w^2 - \lambda$, tiene dos raíces reales distintas, $\sqrt{\lambda}$ y $-\sqrt{\lambda}$, así que la solución general de $X'' - \lambda X = 0$ está dada por $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Para que $X$ cumpla las condiciones de borde $X(0) = X(\ell) = 0$ se debe verificar $A + B = 0$ y $Ae^{\sqrt{\lambda}\ell} + Be^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0$, de donde surge que $A = -B$ y $A(e^{\sqrt{\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda}\ell}) = 0$. Como $e^{\sqrt{\lambda}\ell} \neq e^{-\sqrt{\lambda}\ell}$, la segunda condición implica $A = 0$. Combinando esto con la primera condición se obtiene $B = 0$. Nuevamente obtenemos que $X$ es la función nula así que también descartamos $\lambda > 0$.

Si $\underline{\lambda < 0}$ el polinomio característico de $X'' - \lambda X = 0$ tiene dos raíces complejas distintas, $\sqrt{|\lambda|}i$ y $-\sqrt{|\lambda|}i$ ($i$ es la unidad imaginaria), por lo que la solución general (real) de $X'' - \lambda X = 0$ puede expresarse como $X(x) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}x)$. Para que se cumplan las condiciones de contorno $X(0) = X(\ell) = 0$ se debe verificar $A = 0$ y $B\sin(\sqrt{|\lambda|}\ell) = 0$. La segunda condición se cumple si $B = 0$ o si $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$ para $k \in \mathbb{N}$. Luego, (8)-(9) admite soluciones no nulas si $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$ para $k \in \mathbb{N}$, dadas por $X(x) = B\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$ con $B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$.

En forma similar a lo hecho antes (ver el caso $\lambda < 0$), se ve que la solución general de (10) con $\lambda_k := -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$, está dada por $T(t) = A\cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + B\sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right)$ con $A, B \in \mathbb{R}$.

Lo hecho hasta aquí sugiere que las funciones dadas por:

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

son soluciones particulares de (1)-(2). Se puede verificar con facilidad que efectivamente lo son. Como (1)-(2) es lineal, cualquier combinación lineal *finita* de este tipo de soluciones también será solución.

*Paso 3.* Lo anterior motiva buscar una solución de (1)-(2)-(3) como una combinación lineal *infinita* de funciones como en (11):

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \tag{12}$$

donde los coeficientes $a_k$ y $b_k$, $k \in \mathbb{N}$, se buscan para que se cumpla (3).

Derivando formalmente (12) término a término con respecto a $t$, obtenemos:

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ck\pi}{\ell} \left(-a_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + b_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \tag{13}$$

A partir de (12) y (13) se tiene:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \qquad u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{ck\pi}{\ell} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Ahora consideramos los desarrollos en serie de Fourier de senos de $f$ y $g$ y escribimos formalmente:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(f)} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \qquad \text{donde} \quad B_k^{(f)} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx,$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(g)} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \qquad \text{donde} \quad B_k^{(g)} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{kl}{\pi}x\right) dx.$$

Entonces, para que $u$ verifique las condiciones iniciales (3), debe ser:

$$a_k = B_k^{(f)}, \qquad b_k = \frac{\ell}{ck\pi} B_k^{(g)}.$$

Hemos obtenido que la función $u$ definida por:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \qquad 0 \le x \le \ell,\ t \ge 0, \tag{14}$$

es una solución formal de (1)-(2)-(3), donde:

$$a_k := \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx, \quad b_k := \frac{2}{ck\pi}\int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

2. Sea $D = (0,\ell) \times (0,\infty)$. A partir de (11) vemos que para todo $(x,t) \in \bar{D}$ se tiene:

$$|u_k(x,t)| \leq |a_k| + |b_k| = |B_k^{(f)}| + \frac{\ell}{ck\pi}|B_k^{(g)}| \leq C(|B_k^{(f)}| + k^{-1}|B_k^{(g)}|),$$

para alguna constante $C > 0$. Luego, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k^{(f)}| < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |k^{-1} B_k^{(g)}| < \infty, \tag{16}$$

entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge uniformemente en $\bar{D}$ (ver Teorema 1), digamos a una función $u$, la cual resulta continua en $\bar{D}$ (ver Teorema 2).

En forma similar, calculando las derivadas segundas de $u_k$, se obtienen las siguientes estimaciones para todo $(x,t) \in \bar{D}$:

$$\begin{aligned} |\partial_t u_k(x,t)|,\, |\partial_x u_k(x,t)| &\leq C(k|B_k^{(f)}| + |B_k^{(g)}|), \\ |\partial_{tt} u_k(x,t)|,\, |\partial_{xx} u_k(x,t)|,\, |\partial_{tx} u_k(x,t)|,\, |\partial_{xt} u_k(x,t)| &\leq C(k^2|B_k^{(f)}| + k|B_k^{(g)}|), \end{aligned}$$

para alguna constante $C > 0$.
Entonces, si además se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |B_k^{(f)}| < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k |B_k^{(g)}| < \infty, \tag{17}$$

resulta que todas derivadas parciales de $u$ existen y son continuas hasta el orden dos, y se obtienen derivando término a término la serie que define a $u$ (ver Teoremas 1, 2 y 3).

Para tener (17), y por ende también (16), basta pedir las siguientes condiciones sobre $f$ y $g$:

*a)* $f \in C^2([0,\ell])$, $f'' \in AC[0,\ell]$, $f^{(3)} \in L^2(0,\ell)$, $f(0) = f(\ell) = f''(0) = f''(\ell) = 0$,

*b)* $g \in C^1([0,\ell])$, $g' \in AC[0,\ell]$, $g^{(2)} \in L^2(0,\ell)$, $g(0) = g(\ell) = 0$.

Veamos primero que si $f$ satisface las condiciones en a) se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |B_k^{(f)}| < \infty.$$

Como $f$ cumple a), la serie de Fourier de $\tilde{f}^{(3)}$ se obtiene derivando tres veces término a término la serie de Fourier de $\tilde{f}$, donde $\tilde{f}$ es la extensión periódica a $\mathbb{R}$ de la extensión impar de $f$ a $[-\pi,\pi]$ (ver Práctica 1). Como $\tilde{f}^{(3)} \in L^2(0,\pi)$, usando la desigualdad de Bessel obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^3 |B_k(f)|)^2 < \infty.$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2|B_k(f)| = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 k|B_k(f)|\frac{1}{k}$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}(k^3|B_k(f)|)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \infty.$$

En forma similar se ve que si $g$ cumple b) entonces $\sum_{k=1}^{\infty} k|B_k^{(g)}| < \infty$.

Por lo tanto, si se cumplen a) y b) entonces la función $u$ definida por (12) pertenece a $C^2([0,\ell]\times[0,\infty))$ y sus derivadas parciales se obtienen derivando término a término. En particular, esto último implica que $u$ satisface (1). Además, como las series de Fourier de senos de $f$ y $g$ convergen uniformemente a $f$ y $g$, se tiene que $u$ satisface (3). Finalmente, notamos que es inmediato que $u$ satisface (2).

*Nota (vuelta a la cuerda vibrante).* Consideremos $k\in\mathbb{N}$ y escribamos la fórmula de $u_k$, dada en (11), como:

$$u_k(x,t) = \alpha_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}(t+\vartheta_k)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right),$$

donde $\alpha_k := \sqrt{a_k^2+b_k^2}$ y $\tan(\frac{ck\pi}{\ell}\vartheta_k) := -\frac{b_k}{a_k}$. De este modo vemos que cada punto $x_0\in(0,\ell)$ experimenta un movimiento oscilatorio cuya amplitud es

$$\alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x_0\right).$$

Este tipo de movimiento se conoce como *onda estacionaria* (*standing wave*). Los puntos donde la amplitud es mínima se denominan *nodos* y aquellos donde la amplitud es máxima, *antinodos*.

El perfil de la onda estacionaria en cada instante de tiempo es senoidal y la frecuencia de las vibraciones (también llamada frecuencia angular) es la misma para cada punto $x_0\in(0,\ell)$:

$$\omega_k := \frac{ck\pi}{\ell}.$$

La función $u_k$ se conoce como $k$-ésima onda estacionaria, $k$-ésimo modo o $k$-ésimo armónico. Ver, por ejemplo, el libro clásico [2] para más detalles sobre lo comentado en esta nota, y visitar `https://www.youtube.com/watch?v=-k2TuJfNQ9s` para "ver" el comportamiento de una onda estacionaria.

Ejemplo 2. Considerar el siguiente problema:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad B, \qquad\qquad u = f \quad \text{sobre} \quad \partial B, \tag{18}$$

donde $B := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.

1. Pasar a coordenadas polares, usar el método de separación de variables para hallar una solución formal, y dar condiciones sobre $f$ para que la solución hallada resuelva el problema.

2. Verificar que la solución hallada en el ítem 1. se escribe en coordenadas rectangulares como:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{y\in\partial B} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^2} f(y)\, dS \qquad \forall\, x \in B.$$

*Resolución.*

1. La transformación a coordenadas polares:

$$(x,y) \mapsto (r,\theta) \qquad \text{donde} \quad x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta),$$

es una biyección sobre cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que no contenga al origen. Esto limitará nuestra estrategia a buscar soluciones de la ecuación de Laplace en $B^* := B - \{0\}$ en lugar de $B$ y, como veremos a continuación, a imponer alguna condición en el origen para la solución buscada.
Suponemos que el problema (18) admite una solución $u$ y definimos $U : (0,1] \times [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ por:

$$U(r,\theta) := u(x,y) \quad \text{donde} \quad x = r\cos(\theta),\, y = r\sin(\theta).$$

Como $\Delta u = 0$ en $B$, se tiene (ver Práctica 1):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 0 \qquad \text{en} \quad (0,1)\times[-\pi,\pi).$$

Entonces, consideramos el siguiente problema para $U$:

$$\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}(r,\theta) + \frac{1}{r}U_r(r,\theta) + U_{rr}(r,\theta) = 0 \qquad 0 < r < 1,\, -\pi \le \theta < \pi, \tag{19}$$

$$\lim_{r\to 0^+} U(r,\theta) < \infty \qquad -\pi \le \theta < \pi, \tag{20}$$

$$U(r,-\pi) = U(r,\pi), \qquad U_\theta(r,-\pi) = U_\theta(r,\pi) \qquad 0 < r \le 1. \tag{21}$$

La condición (20) permite tener una solución de la ecuación de Laplace en $B^*$ que esté definida en el origen. Las condiciones (21) surgen naturalmente para que se verifique

$$u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))|_{\theta=-\pi} = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))|_{\theta=\pi} \qquad 0 < r < 1,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\theta}u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right|_{\theta=-\pi} = \left.\frac{\partial}{\partial\theta}u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right|_{\theta=\pi} \qquad 0 < r < 1.$$

Buscamos ahora una solución de (19)-(20)-(21) mediante el método de separación de variables.

*Paso 1.* Suponemos que admite una solución $U$ de la forma:

$$U(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \qquad 0 < r < 1,\, -\pi \le \theta < \pi.$$

Entonces, se debe verificar:

$$\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + R''(r)\Theta(\theta) = 0 \qquad 0 < r < 1,\, -\pi \le \theta < \pi,$$

de donde, procediendo formalmente, se obtiene:

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \qquad 0<r<1,\ -\pi\le\theta<\pi,$$

para algún $\lambda\in\mathbb{R}$. Además, las condiciones (21) y (20) implican que $R$ y $\Theta$ deben ser tales que $\lim_{r\to0^+} R(r)<\infty$, $\Theta(-\pi)=\Theta(\pi)$ y $\Theta'(-\pi)=\Theta'(\pi)$.
Luego, $R$ y $\Theta$ deben ser soluciones de los siguientes problemas:

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0 \qquad 0<r<1, \qquad \lim_{r\to0^+} R(r)<\infty, \tag{22}$$

$$\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0 \quad -\pi\le\theta<\pi, \qquad \Theta(-\pi)=\Theta(\pi), \qquad \Theta'(-\pi)=\Theta'(\pi). \tag{23}$$

*Paso 2.* Razonando de manera similar a los hecho en el Ejemplo 1 se ve que (23) admite soluciones no nulas sólo si $\lambda=0$ o $\lambda=k^2$ para algún $k\in\mathbb{N}$. En el primer caso, cualquier función constante es solución y en el segundo, la solución general está dada por una combinación lineal de $\cos(k\theta)$ y $\sin(k\theta)$. En síntesis, las únicas soluciones de (23) se obtienen cuando $\lambda=k^2$, $k\in\mathbb{N}_0$, y están dadas por:

$$\Theta(\theta)=A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta) \qquad -\pi\le\theta<\pi \qquad (A,B\in\mathbb{R}).$$

Buscamos ahora una fórmula para $R$. Consideramos primero el caso $\lambda=k^2$ para algún $k\in\mathbb{N}$ y suponemos que (22) admite una solución de la forma $R(r)=r^m$ donde $m>0$. Notar que $\lim_{r\to0^+} R(r)<\infty$ y que se debe verificar:

$$0=r^2(m(m-1)r^{m-2})+r(mr^{m-1})-\lambda r^m=(m(m-1)+m-k^2)r^m=(m^2-k^2)r^m,$$

para cualquier $0<r<1$. Entonces debe ser $m^2=k^2$ de donde surge que $m=k$ pues $m>0$. Consideramos ahora el caso $\lambda=0$. En este caso la ecuación diferencial en (22) queda escrita como $rR''(r)+R'(r)=0$, $0<r<1$. Esta ecuación se puede resolver haciendo la sustitución $S:=R'$ y luego separando variables. De este modo se obtiene la solución $R(r)=A\ln r+B$. Para que ve verifique la condición $\lim_{r\to0^+} R(r)<\infty$ debe ser $A=0$. Por lo tanto, cualquier función de la forma:

$$R(r)=Cr^k \qquad 0<r<1 \qquad (C\in\mathbb{R}),$$

es solución de (22).
Es sencillo comprobar que cualquier función de la forma:

$$U_k(r,\theta):=(A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta))\,r^k \qquad 0\le r<1,\ -\pi\le\theta\le\pi, \qquad k\in\mathbb{N}_0,$$

es solución del problema (19)-(20)-(21).

*Paso 3.* Buscamos ahora una solución de la forma:

$$U(r,\theta):=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos(k\theta)+b_k\sin(k\theta))\,r^k, \qquad 0\le r<1,\ -\pi\le\theta\le\pi,$$

donde los coeficiente $a_k$ y $b_k$, $k\in\mathbb{N}$, son a determinar de modo que se cumpla la condición de borde $u=f$ sobre $\partial B$. En coordenadas polares, esta condición se escribe:

$$U(1,\theta)=F(\theta) \quad -\pi\le\theta\le\pi, \tag{24}$$

donde $F(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.
Ahora consideramos el desarrollo en serie de Fourier de $F$ y escribimos formalmente:

$$F(\theta) = \frac{1}{2}A_0^{(F)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(F)} \cos(k\theta) + B_k^{(F)} \sin(k\theta),$$

donde $A_0$, $A_k$, $B_k$, $k \in \mathbb{N}$, son los coeficientes de Fourier de $F$. Entonces, vemos que (24) se verifica sólo si $a_0 = \frac{1}{2}A_0^{(F)}$, $a_k = A_k^{(F)}$ y $b_k = B_k^{(F)}$ para $k \in \mathbb{N}$.
Hemos obtenido que la función definida por:

$$U(r,\theta) := \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\right) r^k, \qquad 0 \leq r \leq 1,\ -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (25)$$

es solución de (19)-(20)-(21)-(24), donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta), \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\cos(k\theta)\, d\theta, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\sin(k\theta)\, d\theta, \qquad k \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Finalmente, buscamos condiciones sobre $f$ para que la función $U$ dada por (25) esté bien definida y resuelva el problema.

A partir de la definión de $U_k$ y de calcular sus derivadas parciales hasta el orden dos, se puede ver que para todo $0 < r \leq 1$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$|D^\alpha U_k(r,\theta)| \leq k^2(|A_k| + |B_k|)r^{k-2},$$

para todo multiíndice $\alpha$ de longitud $|\alpha| \leq 2$. Considerando $0 < r < \rho$, donde $\rho \in (0,1)$ está fijo, y usando que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\rho^k$ converge, vemos que si existe una constante $C$ (independiente de $k$) tal que $|A_k| + |B_k| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2(|A_k| + |B_k|)\rho^{k-2} < \infty.$$

Esto, junto con la arbitrariedad de $\rho \in (0,1)$, implicaría que $U$ admite derivadas parciales continuas hasta el orden dos en $(0,1) \times [-\pi,\pi)$ y que tales derivadas se obtienen derivando término a término (25). Es fácil comprobar que la constante $C$ existe si $F \in L^1([-\pi,\pi])$.
Consideramos ahora $0 < r \leq 1$. Como para cada $k \in \mathbb{R}$ se tiene $|U_k(r,\theta)| \leq |A_k| + |B_k|$, vemos que si

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|A_k| + |B_k|) < \infty, \quad (27)$$

entonces $U$ es continua en $(0,1] \times [-\pi,\pi)$. Para garantizar (27) basta pedir (ver Práctica 1):

$$F \in AC[-\pi,\pi], \quad F' \in L^2(-\pi,\pi), \quad F(-\pi) = F(\pi). \quad (28)$$

Por lo tanto, si $f$ es tal que $F$ satisface (28) entonces la función $U$ definida por (25) resuelve el problema en coordenadas polares (19)-(20)-(21)-(24).

2. A continuación transformaremos (25) a coordenadas rectangulares sobre $B^*$. Lo primero que haremos es reescribir (25) de modo de eliminar la aparición explícta de las series.

   Para $0 < r < 1$, $-\pi \leq \theta < \pi$, se tiene:

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\vartheta)\,d\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\vartheta)\cos(k\vartheta)\,d\vartheta\right)\cos(k\theta)r^k \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\vartheta)\sin(k\vartheta)\,d\vartheta\right)\sin(k\theta)r^k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\vartheta)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\cos(k\vartheta)\cos(k\theta) + \sin(k\vartheta)\sin(k\theta))r^k\right)d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\vartheta)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos(k(\vartheta-\theta))\right)d\vartheta. \end{aligned} \tag{29}$$

   Se deja como ejercicio justificar el intercambio de los símbolos integral y sumatoria en los cálculos anteriores.

   Ahora consideramos $k \in \mathbb{N}$ y anotamos $z = r\cos(\omega) + ir\sin(\omega)$ donde $\omega \in \mathbb{R}$ e $i$ es la unidad imaginaria. Usando que $r^k\cos(k\omega) = \mathrm{Re}(z^k)$ y que $|z| < 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos(k\omega) &= \mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k\right) = \mathrm{Re}\left(1 + 2\left(\frac{1}{1-z} - 1\right)\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-|z|^2+z-\bar{z}}{|1-z|^2}\right) \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega)+r^2}. \end{aligned}$$

   Usando ahora la identidad que acabamos de obtener en (29), obtenemos la siguiente representación integral de $U$:

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)F(\vartheta)}{1-2r\cos(\vartheta-\theta)+r^2}d\vartheta, \tag{30}$$

   a partir de lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)f(\cos(\vartheta),\sin(\vartheta))}{1-2r\cos(\vartheta)\cos(\theta)-2r\sin(\vartheta)\sin(\theta)+r^2}\,d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{(\bar{x},\bar{y})\in\partial B}\frac{(1-r^2)f(\bar{x},\bar{y})}{1-2r\cos(\theta)\bar{x}-2r\sin(\theta)\bar{y}+r^2}\,dS. \end{aligned}$$

   Entonces, escribiendo $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, resulta:

$$u(x,y) = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(\bar{x},\bar{y})\in\partial B}\frac{(1-|(x,y)|^2)f(\bar{x},\bar{y})}{|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})|^2}\,dS,$$

   que es a lo que queríamos llegar.

*Nota*. Hemos obtenido que la función definida por:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{y \in \partial B} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2} f(y)\, dS \qquad x \in B, \tag{31}$$

resuelve la ecuación de Laplace en $B^*$ y satisface $u = f$ sobre $\partial B$. Se puede probar que también resuelve la ecuación en $B$.

La expresión (31) se conoce como *fórmula integral de Poisson* y la función $P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^2}$, $x \in B$, $y \in \partial B$ se conoce como *núcleo de Poisson* en la bola $B$.

Más generalmente, el núcleo de Poisson en la bola $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ es:

$$P(x, y) = \frac{1}{n|B|} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} \qquad x \in B,\ y \in \partial B,$$

y se tiene que:

$$u(x) = \int_{y \in \partial B} P(x, y) f(y)\, dS \qquad x \in B,$$

es la solución de:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad B, \qquad u = f \quad \text{sobre} \quad \partial B,$$

donde $f \in C(\partial B)$. Este resultado es uno de los ingredientes necesarios para implementar el método de Perron para resolver el problema de Dirichlet:

$$\Delta = g \quad \text{en} \quad U, \qquad u = f \quad \text{en} \quad \partial U,$$

en un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^d$ con frontera suave.

Ejemplo 3.
Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución de la ecuación de medios porosos en $\mathbb{R}^n$:

$$u_t(x, t) - \Delta(u^\gamma(x, t)) = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \qquad u \geq 0, \tag{32}$$

donde $\gamma > 1$ es constante.

*Nota*. Cuando $n = 3$, las soluciones de (32) representan la densidad de un gas ideal que fluye en un medio poroso homogéneo infinito. A continuación veremos, a grandes rasgos, los supuestos físicos a partir de los cuales es posible derivar esta ecuación.

Partiendo de la base de que es posible describir macroscópicamente el fluido en base a su densidad $\rho$, su presión $p$ y su velocidad $\mathbf{v}$, los tres ingredientes principales para la derivación de la ecuación (32) para $\rho$ son los siguientes:

- *Ley de conservación de masa*:

  $$\varepsilon \rho_t + div(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{33}$$

  donde $\varepsilon \in (0, 1)$ es una constante que caracteriza la porosidad del medio.

- *Ley de Darcy*:
$$\mu \mathbf{v} = -k\nabla p, \tag{34}$$
donde $\mu$ es la viscosidad del fluido y $k$ caracteriza la permeabilidad del medio.

- *Ecuación de estado*:
$$p = p_0\rho^\gamma, \tag{35}$$
donde $p_0$ es una presión de referencia y $\gamma$ es una constante que se conoce como "exponente politrópico".

Las relaciones que establecen (33), (34) y (35) entre las variables $\rho$, $p$ y $\mathbf{v}$ permiten obtener la siguiente ecuación para la densidad $\rho$:

$$\rho_t = c\,\Delta(\rho^m) \qquad \text{donde} \quad m := 1+\gamma \qquad \text{y} \qquad c := \frac{\gamma k p_0}{(\gamma+1)\varepsilon\mu}. \tag{36}$$

Si se conoce una solución $\rho$ de (36) entonces es posible conocer $p$ y $v$ a través de (34) y (35), caracterizando así el comportamiento del fluido. Mediante un adecuado reescalamiento de las variables es posible considerar $c = 1$, por lo que la ecuación obtenida para $\rho$ coincide con (32).

La ecuación (32) aparece en el modelado de otros problemas físicos, como la transferencia de calor en materiales con conductividad térmica variable o la filtración de un líquido en un medio poroso. Desde el punto de vista de las aplicaciones, interesa resolverla para los casos en que $n = 1$, $n = 2$ o $n = 3$. No obstante, desde el punto de vista matemático no hay nada que impida analizar la ecuación para cualquier valor de $n$. La literatura acerca de la ecuación de medios porosos es mucha y variada, ver, por ejemplo, la monografía [3] y las referencias citadas allí.

*Resolución.* Comenzamos por buscar una solución formal mediante el método de separación de variables.
*Paso 1.* Suponemos que existe una solución $u \geq 0$ de la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0 \qquad \text{donde} \qquad X \geq 0 \quad \text{y} \quad T \geq 0.$$

Entonces, se tiene:

$$X(x)T'(t) - \Delta(X^\gamma(x))T^\gamma(t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,$$

de donde resulta:

$$\frac{T'(t)}{T^\gamma(t)} = \frac{\Delta(X^\gamma(x))}{X(x)} = \lambda \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, $X$ y $T$ deben ser soluciones de las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\Delta(X^\gamma(x)) - \lambda X(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{37}$$
$$T'(t) - \lambda T^\gamma(t) = 0 \qquad t \geq 0. \tag{38}$$

*Paso 2.* Buscamos primero valores para $\lambda$ y una fórmula explícita para $X$, a partir de suponer que la ecuación (37) admite una solución de la forma $X(x) = |x|^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Es sencillo comprobar que el Laplaciano de una funcion radial dada por $v(x) = w(|x|)$, siendo $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, es

$$\Delta v(x) = w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) \qquad \text{donde} \quad r = |x| \neq 0.$$

Luego, para que $X(x) = |x|^\alpha$ satisfaga (37) se debe verificar:

$$\alpha\gamma(\alpha\gamma + n - 2)|x|^{\alpha\gamma - 2} = \lambda |x|^\alpha \qquad \text{para todo} \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{39}$$

lo cual vale sólo si:

$$\alpha = \frac{2}{\gamma - 1}, \qquad \lambda = \alpha\gamma(\alpha\gamma + n - 2) > 0. \tag{40}$$

Es sencillo comprobar que, efectivamente, la función $X$ definida por $X(x) := |x|^\alpha$ es solución de la ecuación (37) cuando se consideran $\alpha$ y $\gamma$ como en (40). Notar que $X \geq 0$.

La ecuación (38) se puede resolver separando variables y su solución general está dada por:

$$T(t) = ((1-\gamma)\lambda t + A)^{\frac{1}{1-\gamma}} \qquad t \in [0, t_*) \quad \text{donde} \quad t_* := \frac{-A}{\lambda(1-\gamma)},\ A > 0.$$

Notar que $T \geq 0$.

*Paso 3*. Hemos obtenido que la función definida por:

$$u(x,t) := |x|^\alpha \left((1-\gamma)\lambda t + A\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0, t_*),$$

es una solución *local* de la ecuación de medios porosos (32), donde:

$$\alpha := \frac{2}{\gamma - 1}, \quad \lambda := \alpha\gamma(\alpha\gamma + n - 2), \quad t_* := \frac{A}{\lambda(1-\gamma)} \quad \text{y} \quad A \in \mathbb{R} \quad \text{es tal que} \quad \lambda A > 0.$$

Notar que:

$$\lim_{t \to t_*^+} u(x,t) = +\infty \qquad \text{para cualquier} \quad x \neq 0,$$

por lo cual se dice que la solución “explota” en tiempo finito para cualquier $x \neq 0$. Con otros métodos es posible encontrar soluciones que no presenten esta característica que es no realista desde el punto de vista físico (ver la nota antes de la resolución).

Referencias

[1] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Inc, third edition, 1976.

[2] A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii. *Equations of Mathematical Physiscs*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.

[3] J. L. Vásquez. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford Mathematical Monographs, 2007.