Ecuaciones diferenciales A/B - 2020 (segundo cuatrimestre)
Docentes: Nicolás Saintier - Andrea Ceretani - Martín Completa
Universidad de Buenos Aires

MATERIAL COMPLEMENTARIO
TEMA: RESULTADOS PRELIMINARES

Teorema 1 (Teorema de la convergencia dominada, ver [3]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ con medida positiva. Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $L^1(U)$ que verifica:

1. $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ *para casi todo* $x \in U$,
2. $|f_k(x)| \leq g(x)$ *para casi todo* $x \in U$ *y todo* $k \in \mathbb{N}$, *para alguna* $g \in L^1(U)$,

entonces,

$$\lim_{k\to\infty} \int_U f_k\, dx = \int_U f\, dx.$$

Teorema 2 (ver [2]).
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ con medida positiva y $1 \leq p \leq \infty$. Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^p(U)$ que verifica:

$$f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{en} \quad L^p(U),$$

entonces existen $g \in L^p(U)$ y $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que:

1. $\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x) = f(x)$ *para casi todo* $x \in U$,
2. $|f_{k_j}(x)| \leq g(x)$ *para casi todo* $x \in U$ *y para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$. Si $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y existe $C > 0$ tal que:

$$|a(t)| \leq C(|t|^{p/q} + 1) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

entonces el operador $A : L^p(U) \to L^q(U)$ definido por:

$$(A(u))(x) = a(u(x)) \quad \text{para} \quad x \in U \quad \text{y} \quad u \in L^p(U),$$

es continuo.

Demostración. Veamos primero que A está bien definida, es decir, que dado $u \in L^p(U)$ se tiene $A(u) \in L^q(U)$. Usando la definición de A junto con la condición de crecimiento (1) y la desigualdad:

$$(a + b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q) \qquad a, b > 0, \tag{2}$$

obtenemos:

$$\int_U |(A(u))(x)|^q\, dx \leq C \int_U (|u(x)|^{p/q} + 1)^q\, dx \leq 2^{q-1} C \int_U (|u(x)|^p + 1)\, dx.$$

Usando ahora que $u \in L^p(U)$ y que U es acotado, se tiene que $A(u) \in L^q(U)$.

Veamos ahora que A es continua. Para ello vamos a probar que:

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{en} \quad L^p(U) \quad \text{implica} \quad A(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A(u) \quad \text{en} \quad L^q(U). \tag{3}$$

Consideramos $\{u_k\} \subset L^p(U)$ convergente a $u \in L^p(U)$. Por el Teorema 2 sabemos que existen $g \in L^p(U)$ y $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que: i) $\lim_{j\to\infty} u_{k_j}(x) = u(x)$ para casi todo $x \in U$, y ii) $|u_{k_j}(x)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in U$ y todo $j \in \mathbb{N}$.

De i) y la continuidad de a, se tiene:

$$\lim_{j\to\infty} |(A(u_{k_j}))(x) - (A(u))(x))|^q = 0 \quad \text{para casi todo} \quad x \in U.$$

Combinando ii) con la condición de crecimiento (1) y usando nuevamente la desigualdad (2), obtenemos:

$$\begin{aligned}
|(A(u_{k_j}))(x) - (A(u))(x))|^q &\leq (|a(u_{k_j}(x))| + |a(u(x))|)^q \\
&\leq 2^{q-1}(|a(u_{k_j}(x))|^q + |a(u(x))|^q) \\
&\leq 2^{q-1}((|u_{k_j}(x)|^{p/q} + 1)^q + (|u(x)|^{p/q} + 1)^q)) \\
&\leq 2^{2(q-1)}(|u_{k_j}(x)|^p + |u(x)|^p + 2) \\
&\leq 2^{2(q-1)}(|g(x)|^p + |u(x)|^p + 2),
\end{aligned}$$

para casi todo $x \in U$, siendo $2^{2(q-1)}(|g|^p + |u|^p + 2) \in L^1(U)$ ya que $u \in L^p(U)$ y U es acotado.

Entonces, por el teorema de la convergencia dominada tenemos que:

$$A(u_{k_j}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} A(u) \quad \text{en} \quad L^q(U). \tag{4}$$

A continuación veremos que (4) implica la convergencia de *toda* la sucesión $\{A(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ a $A(u)$ en $L^q(U)$.

Supongamos, por el contrario, que esto no ocurre. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen $I \in \mathbb{N}$ y $\{A(u_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{A(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$\|A(u_{k_i}) - A(u)\|_q \geq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad i \geq I. \tag{5}$$

Razonando del mismo modo que antes pero cambiando $u_k \to u$ por $u_{k_i} \to u$, se tiene que existe una subsucesión $\{u_{k_{i_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{u_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ para la cual

$$A(u_{k_{i_l}}) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} A(u) \quad \text{en} \quad L^q(U). \tag{6}$$

Notando que $\{A(u_{k_{i_l}})\}_{l\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $\{A(u_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ se ve que (6) contradice (5).

Nota. La desigualdad (2) surge de escribir $(a+b)^q = 2^q\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^q$ y de usar la convexidad de la función x^q en $[0, +\infty)$ (ya que $q \geq 1$).

Definición 1 (ver [1]).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Anotamos $\bar{U}$ para indicar la clausura de U en $\mathbb{R}^n$ y escribimos $V \subset\subset U$ si $\bar{V} \subset U$ y $\bar{V}$ es compacto.
El soporte de una función continua $f : U \to \mathbb{R}$ se define como

$$sop(f) := \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}},$$

y se dice que f tiene soporte compacto contenido en U si $sop(f) \subset\subset U$. Esto último se anota $f \in C_c(U)$.

Ejemplo 2.
Sean $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Probar que $f * g$ está bien definida para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$, donde

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Veamos primero que $f * g$ está bien definida, es decir, que dado $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $(f * g)(x) < \infty$.

Es sencillo comprobar que el soporte de la función $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f}(y) = f(x-y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, es el conjunto $x - sop(f) = \{x - y : y \in sop(f)\}$. A modo de ejemplo, damos la prueba de $sop(\tilde{f}) \subset x - sop(f)$, la otra contención se pueba de manera similar:

Si $z \in sop(\tilde{f})$ entonces existe una sucesión $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $z_k \to z$ y $\tilde{f}(z_k) \neq 0$ para cada k. Luego, la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida por $y_k := x - z_k$ verifica $y_k \to x - z$ y $f(y_k) = \tilde{f}(z_k) \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $x - z \in sop(f)$. Notando que $z = x - (x - z)$ vemos que $z \in x - sop(f)$.

Usando ahora que $sop(\tilde{f}) = x - sop(f)$ y que $sop(f)$ es compacto, se tiene que $sop(\tilde{f})$ también lo es. Combinando esto con la continuidad de $\tilde{f}$ se obtiene que existe $M = M(x) \geq 0$ tal que $|\tilde{f}| \leq M$ en $sop(\tilde{f})$.

Luego,

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{sop(\tilde{f})} |\tilde{f}(y)||g(y)|\,dy \leq M \int_{sop(\tilde{f})} |g(y)|\,dy.$$

Como $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $(f * g)(x) < \infty$.

Veamos ahora que $f * g$ es continua. Para ello vamos a demostrar que $x_k \to x$ implica $(f * g)(x_k) \to (f * g)(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

Primero observamos que:

$$|(f * g)(x_k) - (f * g)(x)| \leq \int_K |f(x-y) - f(x_k - y)||g(y)|\,dy, \tag{7}$$

donde $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto que contiene a $x - sop(f)$ y $x_k - sop(f)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (ver nota al final del ejemplo). Basta entonces probar que el lado derecho de (7) tiende a 0 cuando $k \to \infty$.

Como f es continua y tiene soporte compacto, resulta que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. Luego, dado un $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon \qquad \text{para todo } z, z' \in \mathbb{R}^n \text{ tales que } |z - z'| < \delta.$$

Tomando $z = x - y$, $z' = x_k - y$ tenemos $|z - z'| = |x_k - x|$. Entonces, eligiendo k suficientemente grande, digamos $k \geq k_0$, de manera que $|x_k - x| < \delta$, obtenemos:

$$|f(x-y) - f(x_k - y)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } k \geq k_0 \text{ y todo } y \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, para $k \geq k_0$ resulta:

$$\int_K |f(x-y) - f(x_k - y)||g(y)|\, dy \leq \varepsilon \int_K |g(y)|\, dy,$$

de donde sigue la convergencia buscada puesto que $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
Nota. Una posibilidad para construir K es la siguiente: Ya sabemos que $\tilde{K} := x - sop(f)$ es compacto. Escribimos:

$$x_k - sop(f) = (x_k - x) + (x - sop(f)) = (x_k - x) + \tilde{K}$$

y recordamos que la sucesión $\{x_k - x\}_k$ es acotada (por ser convergente) o sea $|x_k - x| \leq C$ para todo k. Podemos entonces tomar $K = \{y \in \mathbb{R}^n : dist(y, \tilde{K}) \leq C\}$.

TEOREMA 3 (Teorema de Tonelli, ver [2]).
Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ medibles. Si $f : U \times V \to \mathbb{R}$ es medible y no negativa entonces,

$$\int_{U\times V} f(x,y)\, d(x,y) = \int_U \left(\int_V f(x,y)\, dy \right) dx = \int_V \left(\int_U f(x,y)\, dx \right) dy.$$

TEOREMA 4 (Desigualdad de Hölder, ver [2]).
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(U)$ y $g \in L^{p'}(U)$, donde p' es el exponente conjugado de p, entonces $fg \in L^1(U)$ y:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

EJEMPLO 3. (Desigualdad de Young)
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \tag{8}$$

Demostración. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$.

Caso $p = \infty$ Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dy \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dy = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Luego, $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se verifica (8).

Caso $p = 1$ Usando el Teorema de Tonelli, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dy \right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx \right) |g(y)| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \right) |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Luego, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y se verifica (8).

<u>*Caso* $1 < p < \infty$</u> Usando la desigualdad de Hölder, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y)g(y)\,dy\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{1/p'}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|\,dy \\ &\leq \|f\|_1^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\end{aligned}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde p' es el exponente conjugado de p. Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y)g(y)\,dy\right|^p dx \leq \|f\|_1^{p/p'}\int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|^p)(x)\,dx. \tag{9}$$

Usando ahora que $|f|, |g|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sigue del ítem anterior que la integral en el lado derecho de (9) está acotada por $\|f\|_1\|g^p\|_1 = \|f\|_1\|g\|_p^p$, de donde se obtiene que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y que vale (8).

TEOREMA 5 (ver Práctica 0).
Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y:

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g,$$

para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ de longitud $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k$.

TEOREMA 6 (ver Práctica 0).
Sea ρ una función no negativa en $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\rho\|_1 = 1$ y, para cada $\varepsilon > 0$, sea ρ_ε la función definida por:

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p < \infty$, entonces,

$$f * \rho_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f \quad \text{en} \quad L^p(\mathbb{R}^n).$$

Eligiendo:

$$\rho(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde $c > 0$ es tal que $\|\rho\|_1 = 1$, se obtiene $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para cada $\varepsilon > 0$ (ver Práctica 0). La familia $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ se denomina *núcleo regularizante estándar* y se usará repetidamente en la cursada.

Teorema 7 (ver [2]).
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$, entonces,

$$sop(f * g) \subset sop(f) + sop(g) := \{x + y : x \in sop(f),\, y \in sop(g)\}.$$

Ejemplo 4.
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Sean $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. La idea de la prueba consiste en aproximar f por funciones obtenidas del siguiente modo: primero, truncando f para conseguir funciones con soporte compacto, y luego regularizando por convolución la función truncada usando el núcleo regularizante estándar $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $f_\varepsilon := \rho_\varepsilon * g_\varepsilon$, donde $g_\varepsilon := 1_{K_{1/\varepsilon}} f$ y $1_{K_{1/\varepsilon}}$ es la función característica del conjunto

$$K_{1/\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1/\varepsilon\}.$$

Como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $K_{1/\varepsilon}$ es acotado, se obtiene que g_ε es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Combinando esto con el hecho que $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, obtenemos que f_ε es infinitamente diferenciable. Además, como:

$$sop(f_\varepsilon) \subset sop(\rho_\varepsilon) + sop(g_\varepsilon) \subset \overline{B_\varepsilon(0)} + K_{1/\varepsilon},$$

resulta que f_ε tiene soporte compacto. Por lo tanto, $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para cada $\varepsilon > 0$.

Usando la desigualdad de Young y que $\|\rho_\varepsilon\|_1 = 1$, se tiene:

$$\|(\rho_\varepsilon * f) - (\rho_\varepsilon * g_\varepsilon)\|_p = \|\rho_\varepsilon * (f - g_\varepsilon)\|_p \leq \|\rho_\varepsilon\|_1 \|(f - g_\varepsilon)\|_p = \|(f - g_\varepsilon)\|_p.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|f - f_\varepsilon\|_p = \|f - (\rho_\varepsilon * g_\varepsilon)\|_p &\leq \|f - (\rho_\varepsilon * f)\|_p + \|(\rho_\varepsilon * f) - (\rho_\varepsilon * g_\varepsilon)\|_p \\ &\leq \|f - (\rho_\varepsilon * f)\|_p + \|f - g_\varepsilon\|_p.\end{aligned}$$

Por el Teorema 6, sabemos que $\|f - \rho_\varepsilon * f\|_p \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Basta entonces probar que $\|f - g_\varepsilon\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$. Para ello observamos primero que:

$$f(x) - g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1/\varepsilon, \\ f(x) & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego, $|f - g_\varepsilon|^p \leq |f|^p$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$, siendo $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Además, $f - g_\varepsilon \to 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$ cuando $\varepsilon \to 0$. Usando el teorema de la convergencia dominada se obtiene la convergencia buscada.

Una modificación sobre esta prueba permite obtener un resultado análogo reemplazando $\mathbb{R}^n$ por un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ (ejercicio).

Teorema 8 (Primera fórmula de Green, ver Práctica 0).
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con frontera ∂U de clase C^1. Si $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ y $v \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$, entonces:

$$\int_U (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial U} v \partial_{\mathbf{n}} u \, dS,$$

donde $\partial_{\mathbf{n}} u := \nabla u \cdot \mathbf{n}$ y $\mathbf{n}$ es el campo vectorial normal exterior unitario a ∂U.

Teorema 9 (Lema fundamental del cálculo de variaciones, ver Práctica 0). *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in L^1_{loc}(U)$. Si f es tal que:*

$$\int_U f\varphi \, dx = 0 \qquad \textit{para toda} \quad \varphi \in C_c^\infty(U),$$

entonces $f = 0$ en casi todo U.

Ejemplo 5.
Sea. $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con frontera ∂U de clase C^1. Si $u \in C^2(\bar{U})$ es tal que:

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \qquad \text{para todo} \quad v \in C^1(\bar{U}), \tag{10}$$

entonces u es solución del siguiente problema diferencial:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad U, \qquad\qquad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U. \tag{11}$$

A continuación daremos dos demostraciones para este resultado: una usando la fórmula de Green y otra sin usarla.

Demostración 1. Usando la primera fórmula de Green para u y $v \in C_c^\infty(U)$, obtenemos:

$$\int_U v\Delta u \, dx = -\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial U} v\partial_{\mathbf{n}} u \, dS = -\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Para obtener la última igualdad usamos que $v = 0$ en ∂U, ya que v tiene soporte compacto en U. Combinando esto con (10), se tiene:

$$\int_U v\Delta u \, dx = 0 \qquad \forall \, v \in C_c^\infty(U).$$

Luego, por el Teorema 9 sabemos que $\Delta u = 0$ en casi todo punto de U. Como $\Delta u \in C(U)$ se tiene que $\Delta u = 0$ en U.

Usando nuevamente la primera fórmula de Green para u y $v \in C^1(\bar{U})$, obtenemos:

$$\int_{\partial U} v\partial_{\mathbf{n}} u \, dS = 0 \qquad \forall \, v \in C^1(\bar{U}), \tag{12}$$

puesto que $\Delta u = 0$ en U.

Supongamos que $\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in \partial U$, por ejemplo, que $\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) > 0$. Como ∇u es continuo en $\bar{U}$ y $\mathbf{n}$ es continuo en ∂U por ser ∂u de clase C^1, se tiene que $\partial_{\mathbf{n}} u$ es continua en ∂U por lo que existe $\Gamma \subset \partial U$, con medida $(n-1)$-dimensional positiva, tal que $x_0 \in \Gamma$ y $\partial_{\mathbf{n}} u > 0$ en Γ. Ahora elegimos $v \in C^1(\bar{U})$ tal que $v = 1$ en algún $\Gamma_0 \subset \Gamma$, con medida $(n-1)$-dimensional positiva, y $sop(v) \cap \partial U \subset \Gamma$. Entonces,

$$\int_{\partial U} v\partial_{\mathbf{n}} u \, dS = \int_\Gamma v\partial_{\mathbf{n}} u \, dS \geq \int_{\Gamma_0} \partial_{\mathbf{n}} u \, dS > 0,$$

contradiciendo (12). Se llega a la misma conclusión si se supone $\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) < 0$.

Si ∂U fuera más regular, digamos de clase C^2, otra manera de ver que $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ en ∂U a partir de (12) es la siguiente: Usando que ∂U es de clase C^2 se tiene que $\mathbf{n} \in C^1(\partial U)$. Extendiendo $\mathbf{n}$ a $\bar{U}$ como una funcion $C^1(\bar{U})$, vemos que $\partial_{\mathbf{n}} u = \nabla u \cdot \mathbf{n} \in C^1(\bar{U})$. Entonces podemos considerar $v = \partial_{\mathbf{n}} u$ en (12) para obtener:

$$\int_{\partial U} |\partial_{\mathbf{n}} u|^2 \, dS = 0,$$

de donde sigue que $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ en ∂U.

La estrategia de esta demostración aparecerá de nuevo hacia el final del curso, cuando estudiemos *soluciones débiles* de problemas elípticos.

Demostración 2. Tomando $v = u$ en (10) se obtiene:

$$\int_U |\nabla u|^2 \, dx = 0,$$

de lo que sigue que $\nabla u = 0$ para casi todo punto de U. Usando la continuidad de ∇u, se tiene que $\nabla u = 0$ en U.

Luego, u es constante en cada componente conexa de U por lo cual u satisface (11).

Referencias

[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2 edition, 2003.

[2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.

[3] L. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2010.