RECUPERATORIO PRIMER PARCIAL - 14/12/2020

Para aprobar el examen se deben resolver correctamente al menos dos ejercicios. Recuerde justificar todas las respuestas.

1. Considerar el problema:

$$\Delta u(x,y) - u_x(x,y) = 0 \qquad x \in (0,\pi),\ y \in (0,\pi), \tag{1}$$
$$u(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = f(x) \qquad y \in (0,\pi), \tag{2}$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = 0 \qquad x \in (0,\pi). \tag{3}$$

   (a) Usar el método de separación de variables para deducir la solución formal:

$$u(x,y) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\, y)}{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\, \pi)} \sin(kx) \qquad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi],$$

   donde b_k es el k-ésimo coeficiente en el desarrollo en serie de Fourier de senos de $\exp(-x/2)f(x)$. *Indicar sólo los pasos fundamentales del método, no detallar todos los cálculos.*

   (b) Demostrar que si $f \in L^2(0,\pi)$ entonces la función u dada en (a) pertenece a $C^2([0,\pi] \times [0,\pi))$ y resuelve el problema si se considera la condición $u(\,\cdot\,,\pi) = f$ en el sentido de L^2.
   Sugerencia: Pueden ser de utilidad las desigualdades:

$$\left|\frac{\sinh(ay)}{\sinh(az)}\right| \le \exp(a(y-z)), \qquad \left|\frac{\cosh(ay)}{\sinh(az)}\right| \le \exp(a(y-z)) + \frac{1}{\sinh(az)} \qquad \forall\, 0 < y < z,\ a > 0.$$

   Indicar los pasos fundamentales de la prueba, no detallar todos los cálculos.

2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y sea $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ solución del problema:

$$\Delta u = u^3 - u \quad \text{en} \quad U, \qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U.$$

   (a) Probar que $\|u\|_{L^\infty(U)} \le 1$.
   (b) Probar que si u es no negativa en U y U es conexo, entonces $u \equiv 0$ o $u > 0$ en U.

3. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Probar que si la transformada de Fourier de f, $\hat{f}$, pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \le p \le \infty$ y se verifica:

$$\|f\|_p \le \|f\|_1^{1/p} \|\hat{f}\|_1^{1-1/p},$$

   entendiendo $1/p = 0$ si $p = \infty$.

4. Sean $T > 0$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Considerar la ecuación:

$$\partial_t u + f(x,t,u) \cdot \nabla u - \Delta u = 0 \qquad \text{en} \quad U_T,$$

   donde $f : U_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ está dada y $U_T = U \times (0,T]$. Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ es solución entonces $\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\partial_p U_T} u$, donde $\partial_p U_T$ es la frontera parabólica de U_T.