RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL - 14/12/2020
RESOLUCIÓN

1. Considerar el problema:

$$\Delta u(x,y) - u_x(x,y) = 0 \qquad x \in (0,\pi),\ y \in (0,\pi), \tag{1}$$
$$u(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = f(x) \qquad y \in (0,\pi), \tag{2}$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = 0 \qquad x \in (0,\pi). \tag{3}$$

(a) Usar el método de separación de variables para deducir la solución formal:

$$u(x,y) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\, y)}{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\, \pi)} \sin(kx) \qquad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi],$$

donde b_k es el k-ésimo coeficiente en el desarrollo en serie de Fourier de senos de $\exp(-x/2)f(x)$. *Indicar sólo los pasos fundamentales del método, no detallar todos los cálculos.*

(b) Demostrar que si $f \in L^2(0,\pi)$ entonces la función u dada en (a) pertenece a $C^2([0,\pi] \times [0,\pi))$ y resuelve el problema si se considera la condición $u(\,\cdot\,,\pi) = f$ en el sentido de L^2.
Sugerencia: Pueden ser de utilidad las desigualdades:

$$\left|\frac{\sinh(ay)}{\sinh(az)}\right| \leq \exp(a(y-z)), \qquad \left|\frac{\cosh(ay)}{\sinh(az)}\right| \leq \exp(a(y-z)) + \frac{1}{\sinh(az)} \qquad \forall\, 0 < y < z,\ a > 0.$$

Indicar los pasos fundamentales de la prueba, no detallar todos los cálculos.

Resolución.

(a) Suponemos que existe una solución no nula u de la forma:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \qquad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi]. \tag{4}$$

Usando que u satisface (1), obtenemos:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) - X'(x)Y(y) = 0 \qquad \forall\, x \in (0,\pi),\ y \in (0,\pi),$$

de donde sigue que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{X''(x) - X'(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \qquad \forall\, x \in (0,\pi),\ y \in (0,\pi). \tag{5}$$

Usando ahora que $u(x,0) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ para $x,y \in (0,\pi)$, se tiene:

$$X(x)Y(0) = 0 \quad \forall\, x \in (0,\pi), \qquad X(0)Y(y) = X(\pi)Y(y) = 0 \quad \forall\, y \in (0,\pi),$$

de donde se deduce que $Y(0) = X(0) = X(\pi) = 0$. Combinando esto con (5), obtenemos que X e Y son solución de los siguientes problemas:

$$X''(x) - X'(x) - \lambda X(x) = 0 \quad x \in (0,\pi), \qquad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{6}$$
$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \quad y \in (0,\pi), \qquad Y(0) = 0. \tag{7}$$

El problema (6) admite soluciones no nulas sólo si:

$$\lambda = -\left(k^2 + \frac{1}{4}\right) \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

en cuyo caso la solución general es:

$$X(x) = B \exp\left(\frac{x}{2}\right) \sin(kx) \qquad x \in [0,\pi],\ B \in \mathbb{R}.$$

Para λ dado por (8), la solución general de (7) es:

$$Y(y) = C \sinh\left(\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\, y\right) \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Entonces definimos:

$$u(x,y) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sinh\left(\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\, y\right) \sin(kx) \qquad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi],\ B_k \in \mathbb{R},$$

y observamos que, formalmente, u satisface la ecuación $\Delta u - u_x = 0$ en $(0,\pi) \times (0,\pi)$ y las condiciones $u(x,0) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ para todo $x, y \in (0,\pi)$. A continuación determinaremos los coeficientes B_k para que u verifique $u(x,\pi) = f(x)$ para todo $x \in (0,\pi)$. Primero observamos que u satisface esta condición sólo si:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sinh\left(\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\, \pi\right) \sin(kx) = \exp\left(-\frac{x}{2}\right) f(x) \qquad \forall\, x \in [0,\pi].$$

Igualando formalmente el lado derecho a su desarrollo en serie de Fourier de senos, deducimos que:

$$B_k = \frac{b_k}{\sinh(\sqrt{k^2 + 1/4}\, \pi)} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

donde b_k es el k-ésimo coeficiente de Fourier en el desarrollo en serie de senos de $\exp(-x/2) f(x)$:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(-x/2) f(x) \sin(kx)\, dx \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Para $k \in \mathbb{N}$, definimos:

$$u_k(x,y) = b_k \exp\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sinh(\sqrt{k^2 + 1/4}\, y)}{\sinh(\sqrt{k^2 + 1/4}\, \pi)} \sin(kx) \qquad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi].$$

Usando las estimaciones:

$$\left|\frac{\sinh(ay)}{\sinh(az)}\right| \le \exp(a(y-z)), \qquad \left|\frac{\cosh(ay)}{\sinh(az)}\right| \le \exp(a(y-z)) + \frac{1}{\sinh(az)} \qquad \forall\, 0 < y < z,\ a > 0,$$

vemos que para $\varepsilon \in (0,\pi)$ y $x \in [0,\pi]$, $y \in [0, \pi-\varepsilon]$, se tiene:

$$\begin{aligned}
|u_k(x,y)| &\leq C|b_k| \exp\left(-k\varepsilon\right), \\
|\partial_x u_k(x,y)| &\leq Ck|b_k| \exp\left(-k\varepsilon\right), \\
|\partial_y u_k(x,y)|,\ |\partial_{xy} u_k(x,y)|,\ |\partial_{yx} u_k(x,y)| &\leq Ck|b_k| \exp\left(-k\varepsilon\right) + C\frac{k|b_k|}{\sinh(k\pi)}, \\
&\leq Ck|b_k| \exp\left(-k\varepsilon\right) + Ck|b_k| \exp(-k\pi), \\
|\partial_{xx} u_k(x,y)|,\ |\partial_{yy} u_k(x,y)| &\leq Ck^2|b_k| \exp\left(-k\varepsilon\right),
\end{aligned}$$

donde $C > 0$ es constante. Notando ahora que $|b_k| \leq C\|f\|_2$ y que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-ka) < \infty \qquad\qquad \forall\, a > 0,$$

obtenemos que $u \in C^2([0,\pi]\times[0,\pi-\varepsilon])$ y que sus derivadas se obtienen derivando término a término. De la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ sigue que lo mismo vale reemplazando $[0,\pi]\times[0,\pi-\varepsilon]$ por $[0,\pi]\times[0,\pi)$. En particular, u satisface $\Delta u - u_x = 0$ en $(0,\pi)\times(0,\pi)$ y las condiciones $u(x,0) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ para todo $x, y \in (0,\pi)$.

Veamos ahora que u verifica $u(x,\pi) = f(x)$ para $x \in (0,\pi)$, en el sentido de L^2. Primero observamos que esto equivale a ver que:

$$\lim_{y\to\pi} \|v(\,\cdot\,,y) - g\|_2 = 0,$$

para $v(x,y) = \exp(-x/2)u(x,y)$ y $g(x) = \exp(-x/2)f(x)$. Notar que $g \in L^2(0,\pi)$ y que $v(\,\cdot\,,y) \in L^2(0,\pi)$ para cualquier $y \in (0,\pi)$.

Consideramos $y \in (0,\pi)$ y usamos la identidad de Parseval para obtener:

$$\|v(\,\cdot\,,y) - g\|_2 = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \left(\frac{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,y)}{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,\pi)} - 1\right)^2.$$

Usando la desigualdad de Bessel, obtenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=M+1}^{\infty} b_k^2 < \varepsilon$. Además,

$$\left|\frac{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,y)}{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,\pi)} - 1\right| \leq 2. \tag{9}$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \left(\frac{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,y)}{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,\pi)} - 1\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{M} b_k^2 \left(\frac{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,y)}{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,\pi)} - 1\right)^2 + 2\varepsilon$$

Tomando límite para $y \to \pi$ miembro a mimbro de esta desigualdad, obtenemos:

$$\limsup_{y\to\pi} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \left(\frac{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,y)}{\sinh(\sqrt{k^2+1/4}\,\pi)} - 1\right)^2 \leq 2\varepsilon,$$

de donde sigue la convergencia buscada.

2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y sea $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ solución del problema:

$$\Delta u = u^3 - u \quad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U.$$

(a) Probar que $\|u\|_{L^\infty(U)} \leq 1$.

(b) Probar que si u es no negativa en U y U es conexo, entonces $u \equiv 0$ o $u > 0$ en U.

Resolución.

(a) Suponemos, por el contrario, que esto no ocurre. Luego existe $x_0 \in \bar{U}$ tal que:

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u > 1 \qquad \text{o bien,} \qquad u(x_0) = \min_{\bar{U}} u < -1.$$

Suponemos primero que $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$. Como $x_0 \in U$, ya que $u = 0$ sobre ∂U, se tiene que la matriz Hessiana de u en x_0 es semidefinida negativa. Luego, $\Delta u(x_0) \leq 0$. Por otro lado, observamos que:

$$\Delta u(x_0) = u(x_0)^3 - u(x_0) = u(x_0)(u(x_0) - 1)(u(x_0) + 1) > 0.$$

Absurdo. Razonando de manera análoga se ve que $u(x_0) = \min_{\bar{U}} u$ tampoco puede ocurrir. Por lo tanto, $|u(x)| \leq 1$ para todo $x \in U$, de donde se deduce $\|u\|_{L^\infty(U)} \leq 1$.

(b) Usando que $u \geq 0$ en U y que $\|u\|_{L^\infty(U)} \leq 1$, se obtiene que u es superarmónica en U:

$$\Delta u = u(u^2 - 1) \leq 0 \qquad \text{en} \quad U.$$

Luego, u satisface el principio fuerte del mínimo en U.
Suponemos que existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = 0$. Usando que u satisface el principio débil del mínimo en U y que $u = 0$ sobre ∂U, obtenemos $\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u = 0$. Usando ahora el principio fuerte del mínimo, concluimos que $u \equiv 0$ en U.
Luego, $u \equiv 0$ en U o $u > 0$ en U.

3. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Probar que si la transformada de Fourier de f, $\hat{f}$, pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y se verifica:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_1^{1/p} \|\hat{f}\|_1^{1-1/p},$$

entendiendo $1/p = 0$ si $p = \infty$.

Resolución. Usando la fórmula de inversión para funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ con transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$, obtenemos:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \exp(2i\pi x \cdot y)\, dy \qquad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego,

$$|f(x)| \leq \|\hat{f}\|_1 \qquad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Si $p = 1$, el enunciado es trivial y no hay nada que probar. Si $p = \infty$, la prueba es una consecuencia directa (10). Supongamos ahora $1 < p < \infty$. Usando (10), se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-1} |f(x)|\, dx \leq \|\hat{f}\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|\hat{f}\|_1^{p-1} \|f\|_1.$$

Luego, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y se verifica la desigualdad $\|f\|_p \leq \|f\|_1^{1/p} \|\hat{f}\|_1^{1-1/p}$.

4. Sean $T > 0$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Considerar la ecuación:

$$\partial_t u + f(x,t,u) \cdot \nabla u - \Delta u = 0 \qquad \text{en} \quad U_T,$$

donde $f : U_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ está dada y $U_T = U \times (0, T]$. Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ es solución entonces $\max\limits_{\overline{U_T}} u = \max\limits_{\partial_p U_T} u$, donde $\partial_p U_T$ es la frontera parabólica de U_T.

Resolución. Consideramos $\varepsilon > 0$ y definimos $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$ para $(x,t) \in \overline{U_T}$. Como u es solución, se tiene que u_ε satisface:

$$\partial_t u_\varepsilon + f(x,t,u_\varepsilon + \varepsilon t) \cdot \nabla u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = -\varepsilon < 0 \qquad \text{en} \quad U_T.$$

A continuación vamos a probar que $\max\limits_{\overline{U_T}} u_\varepsilon = \max\limits_{\partial_p U_T} u_\varepsilon$, de lo cual sigue que $\max\limits_{\overline{U_T}} u = \max\limits_{\partial_p U_T} u$.

Suponemos, por el contrario, que $\max\limits_{\overline{U_T}} u_\varepsilon > \max\limits_{\partial_p U_T} u_\varepsilon$. Luego existe $(x_0, t_0) \in U_T$ tal que $u_\varepsilon(x_0,t_0) = \max\limits_{\overline{U_T}} u_\varepsilon$. Notando que $\partial_t u_\varepsilon(x_0,t_0) \geq 0$ y $\nabla u_\varepsilon(x_0,t_0) = 0$, obtenemos:

$$-\varepsilon = \partial_t u_\varepsilon(x_0,t_0) + f(x_0,t_0,u_\varepsilon(x_0,t_0) + \varepsilon t_0) \cdot \nabla u_\varepsilon(x_0,t_0) - \Delta u_\varepsilon(x_0,t_0) \geq -\Delta u_\varepsilon(x_0,t_0).$$

Usando ahora que la matriz Hessiana de $u(\,\cdot\,,t_0)$ es semidefinida negativa en x_0, se tiene que $\Delta u(x_0,t_0) \leq 0$, lo cual da una contradicción.