SEGUNDO PARCIAL - 09/12/2020

Para aprobar el examen se deben resolver correctamente al menos dos ejercicios. Recuerde justificar todas las respuestas.

1. Determinar una solución débil del siguiente problema:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = u_x(x,t) \qquad x \in \mathbb{R},\ t>0, \tag{1}$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

donde $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$

Sugerencia: Reescribir la ecuación (1) como $u_t + (f(u))_x = 0$ para una cierta funcion f.

2. Si $u : \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciales hasta el orden 2, definimos:

$$\mathcal{A}_u(t) = \sum_{|\alpha|\leq 2,\, \alpha\in\mathbb{N}_0^4} \int_{\mathbb{R}^3} |D^\alpha u(x,t)|\, dx.$$

Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$, y sea u la solución de:

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0, \tag{3}$$
$$u(x,0) = g(x), \qquad u_t(x,0) = h(x) \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{4}$$

Demostrar las siguientes propiedades:

   1. Si $\mathcal{A}_u(0) < \infty$ entonces existe una constante $K>0$ independiente de u tal que:

   $$|u(x,t)| \leq \frac{K}{t}\mathcal{A}_u(0) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ t>1. \tag{5}$$

   Puede ser útil la igualdad: $th(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x) = \sum_{i=1}^{3}\Big((th(y)+g(y))\,\frac{y_i-x_i}{t} + t\,\partial_i g(y)\Big)\frac{y_i-x_i}{t}$, para $y \in \partial B_t(x)$.

   2. Sea u como en el ítem 1. Si $u(\,\cdot\,,t) \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $u_t(\,\cdot\,,t) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ para todo t suficientemente grande, y $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_u(t)}{t} = 0$, entonces u es la función nula.
   Sugerencia: Considerar la función auxiliar $v(x,t) = u(x,T-t)$ para $T>0$ dado.

3. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y conexo con frontera de clase C^1 y sea Γ un subconjunto de ∂U con medida positiva. Demostrar que existe una constante $\mu > 0$ tal que:

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq \mu\,\|\nabla u\|_2^2 + \mu\left(\int_\Gamma Tr(u)\,dS\right)^2 \qquad \forall\, u \in H^1(U), \tag{6}$$

donde Tr es el operador de traza de $H^1(U)$ en $L^2(\partial U)$.

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y conexo con frontera de clase C^1. Se dice que $u \in H^1(U)$ es una solución débil de:

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{en} \quad U, \qquad \partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u = g \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{7}$$

si $a(u,v) = F(v)$ para toda $v \in H^1(U)$, donde $f \in L^2(U)$, $g \in L^2(\partial U)$, $c \in L^\infty(U)$, $c \geq 0$, $\alpha \in L^\infty(\partial U)$, $\alpha \geq 0$, y:

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_U c\, uv \, dx + \int_{\partial U} \alpha Tr(u) Tr(v) \, dS \qquad && u, v \in H^1(U), \\
F(v) &= \int_U f v \, dx + \int_{\partial U} g Tr(v) \, dS && v \in H^1(U),
\end{aligned}
$$

siendo Tr el operador de traza de $H^1(U)$ en $L^2(\partial U)$. Demostrar que si

$$
\int_U c^2 \, dx + \int_{\partial U} \alpha^2 \, dS > 0, \tag{8}
$$

entonces el problema (7) admite una única solución débil.

La siguiente propiedad se puede usar sin demostrar:

Sea V un subconjunto de U de medida positiva. Existe una constante $\gamma > 0$ tal que:

$$
\|u\|_{1,2}^2 \leq \gamma \, \|\nabla u\|_2^2 + \gamma \left(\int_V u \, dx \right)^2 \qquad \forall\, u \in H^1(U).
$$