SEGUNDO PARCIAL - 09/12/2020
RESOLUCIÓN

1. Determinar una solución débil del siguiente problema:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = u_x(x,t) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1}$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

donde $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$

Sugerencia: Reescribir la ecuación (1) como $u_t + (f(u))_x = 0$ para una cierta funcion f.

Resolución. Reescribimos la ecuación (1) como:

$$u_t(x,t) + (f(u(x,t)))_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3}$$

donde $f(z) = \frac{z^2}{2} - z$, $z \in \mathbb{R}$.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, la curva característica $\{(x(t),t) : t \in \mathbb{R}\}$ está determinada por la solución de

$$x'(t) = f'(u(x(t),t)) \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad x(0) = x_0. \tag{4}$$

Si u es solución de (1)-(2) y $\{(x(t),t) : t \in \mathbb{R}\}$ es una curva característica, entonces $\frac{d}{dt}u(x(t),t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego u es constante sobre toda curva característica. Combinando esto con (4) obtenemos que $x'(t) = f'(u(x(0),0)) = f'(g(x_0))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde deducimos que

$$x(t) = f'(g(x_0))t + x_0 = (g(x_0) - 1)t + x_0 = \begin{cases} x_0 & \text{si} \quad x_0 \geq 0, \\ t + x_0 & \text{si} \quad x_0 < 0. \end{cases}$$

Notar que si $x_1 \leq 0 < x_2$ entonces las curvas características por x_1 y x_2 se intersecan en un punto de la forma (ξ, t) con $t > 0$.

Dado $x \in \mathbb{R}$ planteamos $x(t) = x$ para determinar la curva característica por x_0 que contiene a x. Si $x_0 \geq 0$, entonces $x_0 = x$. En cambio, si $x_0 < 0$, resulta $x_0 = x - t$ siempre que $x < t$. Como u es constante sobre las curvas características, obtenemos que u_1 y u_2 dadas por:

$$u_1(x,t) = 1 \qquad x \geq 0,\ t > 0, \qquad u_2(x,t) = 2 \qquad x < t,\ t > 0,$$

son soluciones de (1)-(2) en sus respectivos dominios. Esto motiva buscar una solución débil de la forma:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > \gamma(t), \\ 2 & \text{si} \quad x < \gamma(t), \end{cases} \tag{5}$$

donde γ satisface:

$$[u](t)\gamma'(t) = [f(u)](t) \qquad t > 0, \qquad \gamma(0) = 0.$$

siendo $[u] = u^+ - u^-$ y $[f(u)] = f(u^+) - f(u^-)$. Anotando:

$$\omega^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) : x > \gamma(t)\}, \qquad \omega^- = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) : x < \gamma(t)\},$$

vemos que:

$$u^+(t) = \lim_{\omega^+ \ni (x,s) \to (\gamma(t),t)} u(x,s) = 1, \qquad u^-(t) = \lim_{\omega^- \ni (x,s) \to (\gamma(t),t)} u(x,s) = 2.$$

Luego, $[u](t) = -1$ y $[f](t) = -\frac{1}{2}$ para todo $t > 0$, de donde sigue que la ecuación que satisface γ es $\gamma'(t) = \frac{1}{2}$, $t > 0$. Combinando esto con la condición $\gamma(0) = 0$, obtenemos que

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}t \qquad t > 0. \tag{6}$$

Notando finalmente que u es solución de (1)-(2) en ω^+ y en ω^-, obtenemos que la función u dada por (5) con γ definida por (6) es una solución débil de (1)-(2).

Otra manera de resolver este ejercicio consiste en verificar que u es solución débil de (1)-(2) si y sólo si $v = u - 1$ es solución débil de

$$\begin{aligned} v_t(x,t) + v_x(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ v(x,0) &= \mathbb{1}_{\{x<0\}} && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

que es un problema para la ecuación de Burgers. Vimos en la teórica que $v(x,t) = \mathbb{1}_{\{t/2>x\}}$ es solución débil.

2. Si $u : \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciales hasta el orden 2, definimos:

$$\mathcal{A}_u(t) = \sum_{|\alpha|\le 2,\, \alpha\in\mathbb{N}_0^4} \int_{\mathbb{R}^3} |D^\alpha u(x,t)|\, dx.$$

Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$, y sea u la solución de:

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = g(x), \qquad u_t(x,0) = h(x) \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{8}$$

Demostrar las siguientes propiedades:

1. Si $\mathcal{A}_u(0) < \infty$ entonces existe una constante $K > 0$ independiente de u tal que:

$$|u(x,t)| \le \frac{K}{t}\mathcal{A}_u(0) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ t > 1. \tag{9}$$

Puede ser útil la igualdad: $th(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x) = \sum_{i=1}^{3}\left((th(y)+g(y))\,\frac{y_i - x_i}{t} + t\,\partial_i g(y)\right)\frac{y_i-x_i}{t}$, *para* $y \in \partial B_t(x)$.

2. Sea u como en el ítem 1. Si $u(\,\cdot\,,t) \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $u_t(\,\cdot\,,t) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ para todo t suficientemente grande, y $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_u(t)}{t} = 0$, entonces u es la función nula.
Sugerencia: Considerar la función auxiliar $v(x,t) = u(x,T-t)$ *para* $T > 0$ *dado.*

Demostración.

1. Sean $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 1$. Como u es solución de (7)-(8) entonces $u(x,t)$ está dada por la fórmula de Kirchhoff:

$$u(x,t) = ⨍_{\partial B_t(x)} \left(th(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\right)\, dS_y. \tag{10}$$

Ahora reescribimos (10) como sigue:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \left(th(y) + g(y) + \sum_{i=1}^{3}\partial_i g(y)(y_i - x_i)\right) dS_y \\
&= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \left((th(y)+g(y))\,\frac{|y-x|^2}{t^2} + \sum_{i=1}^{3} t\,\partial_i g(y)\,\frac{y_i-x_i}{t}\right) dS_y \\
&= \frac{1}{4\pi t^2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial B_t(x)} \left((th(y)+g(y))\,\frac{y_i-x_i}{t} + t\,\partial_i g(y)\right)\frac{y_i-x_i}{t}\, dS_y
\end{aligned}$$

Usando que el campo unitario exterior normal a $\partial B_t(x)$ en un punto y está dado por

$\mathbf{n}(y) = \frac{y-x}{t}$, y la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\pi t^2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial B_t(x)}\left((th(y)+g(y))\,\frac{y_i-x_i}{t}+t\partial_i g(y)\right)n_i(y)\,dS_y \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\sum_{i=1}^{3}\int_{B_t(x)}\partial_i\left((th(y)+g(y))\,\frac{y_i-x_i}{t}+t\partial_i g(y)\right)dy \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\sum_{i=1}^{3}\int_{B_t(x)}\left((t\partial_i h(y)+\partial_i g(y))\,\frac{y_i-x_i}{t}+(th(y)+g(y))\frac{1}{t}+t\partial_{ii}g(y)\right)dy. \end{aligned}$$

Luego, usando que $|y_i - x_i| \leq |y-x| = t$ para $i = 1,2,3$, y que $t \geq 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{4\pi t^2}\sum_{i=1}^{3}\int_{B_t(x)}\left(t|\partial_i h(y)|+|\partial_i g(y)|+|h(y)|+\frac{1}{t}|g(y)|+t|\partial_{ii}g(y)|\right)dy \\ &\leq \frac{1}{4\pi t}\sum_{i=1}^{3}\int_{B_t(x)}(|\partial_i h(y)|+|\partial_i g(y)|+|h(y)|+|g(y)|+|\partial_{ii}g(y)|)\,dy \\ &= \frac{1}{4\pi t}\sum_{i=1}^{3}\int_{B_t(x)}(|\partial_i h(y)|+|\partial_i g(y)|+|\partial_{ii}g(y)|)\,dy+\frac{3}{4\pi t}\int_{B_t(x)}(|h(y)|+|g(y)|)\,dy. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, obtenemos:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| \leq& \frac{1}{4\pi t}\sum_{i=1}^{3}\int_{B_t(x)}(|\partial_{ti}u(y,0)|+|\partial_i u(y,0)|+|\partial_{ii}u(y,0)|)\,dy \\ &+\frac{3}{4\pi t}\int_{B_t(x)}(|\partial_t u(y,0)|+|u(y,0)|)\,dy \\ \leq& \frac{K}{t}\mathcal{A}_u(0), \end{aligned}$$

donde $K = \frac{3}{4\pi}$.

2. Suponemos que $u(\,\cdot\,,t) \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $u_t(\,\cdot\,,t) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ para todo $t \geq T_0$ y consideramos $T \geq T_0$. Definimos $v(x,t) = u(x,T-t)$ para $x \in \mathbb{R}^3$ y $0 < t < T$. Notar que v es solución de:

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - \Delta v(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R}^3,\ 0<t<T, \\ v(x,0) = u(x,T), \qquad v_t(x,s) &= -\,u_t(x,T) && x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to\infty}\frac{\mathcal{A}_u(t)}{t} = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $T_1 > 0$ tal que $|\mathcal{A}_u(t)| \leq \varepsilon t$ para todo $t \geq T_1$. Entonces, eligiendo $T \geq \tilde{T} = \max\{T_0, T_1\}$ se tiene que $\mathcal{A}_v(0) < \infty$ ya que $\mathcal{A}_v(0) = \mathcal{A}_u(T)$. Usando el ítem 1, se tiene:

$$|u(x,T-t)| \leq \frac{K}{t}\mathcal{A}_u(T) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ 0<t<T.$$

Luego,

$$|u(x,s)| \leq \frac{K}{T-s}\mathcal{A}_u(T) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ s>0,\ T \geq \tilde{T}.$$

Haciendo $T \to \infty$ miembro a miembro de la expresión anterior obtenemos que $u(x,s) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y todo $s > 0$. Luego u es la función nula.

3. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y conexo con frontera de clase C^1 y sea Γ un subconjunto de ∂U con medida positiva. Demostrar que existe una constante $\mu > 0$ tal que:

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq \mu \|\nabla u\|_2^2 + \mu \left(\int_\Gamma Tr(u)\, dS \right)^2 \qquad \forall\, u \in H^1(U), \tag{11}$$

donde Tr es el operador de traza de $H^1(U)$ en $L^2(\partial U)$.

Demostración.

Basta demostrar que existe una constante $\mu > 0$ tal que:

$$\|u\|_2^2 \leq \mu \|\nabla u\|_2^2 + \mu \left(\int_\Gamma Tr(u)\, dS \right)^2 \qquad \forall\, u \in H^1(U), \tag{12}$$

ya que $\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2$. Supongamos, por el absurdo, que (12) es falso. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $u_k \in H^1(U)$ tal que:

$$\|u_k\|_2^2 > k \|\nabla u_k\|_2^2 + k \left(\int_\Gamma Tr(u_k)\, dS \right)^2. \tag{13}$$

Notar que (13) implica que $\|u_k\|_2 \neq 0$, así que dividiendo miembro a miembro de (13) por $\|u_k\|_2^2$, obtenemos:

$$1 > k \|\nabla v_k\|_2^2 + k \left(\int_\Gamma Tr(v_k)\, dS \right)^2, \tag{14}$$

para $v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_2}$.

A partir de (14) se ve que

$$\|\nabla v_k\|_2 \leq \frac{1}{k}. \tag{15}$$

Además, $\|v_k\|_2 = 1$. Luego, $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $H^1(U)$. Entonces, por el teorema de Rellich-Kondrachov, existen $v \in H^1(U)$ y $\{v_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $v_{k_j} \to v$ en $L^2(U)$ y $\|\nabla v\|_2 \leq \liminf \|\nabla v_{k_j}\|_2$. Combinando esto último con (15) obtenemos que $\nabla v = 0$ en U y, como U es conexo, obtenemos que v es constante en U. Ahora notamos que $\nabla v_{k_j} \to \nabla v$ en $L^2(U)$ ya que $\nabla v_{k_j} \to 0$ en $L^2(U)$, por (15), y $\nabla v = 0$. Combinando esto con que $v_{k_j} \to v$ en $L^2(U)$, se tiene que $v_{k_j} \to v$ en $H^1(U)$. Usando la continuidad del operador de traza, obtenemos que $Tr(v_{k_j}) \to Tr(v)$ en $L^2(\partial U)$. Como ∂U es acotado, se tiene la misma convergencia en $L^1(\partial U)$. Y como Γ es un subconjunto de medida positiva de ∂U, también se tiene que $Tr(v_{k_j}) \to Tr(v)$ en $L^1(\Gamma)$ y, por lo tanto,

$$\int_\Gamma Tr(v_{k_j})\, dS \to \int_\Gamma Tr(v)\, dS.$$

A partir de (14) se observa que

$$\left| \int_\Gamma Tr(v_{k_j})\, dS \right| < \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \forall\, j \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce que $\int_\Gamma Tr(v)\, dS = 0$. Luego, como v es constante, se tiene que $Tr(v) = 0$ en ∂U. Por lo tanto, debe ser $v = 0$ en U. Esto contradice que la convergencia de $\{v_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ a v en $L^2(U)$, ya que $\|v_{k_j}\|_2 = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y conexo con frontera de clase C^1. Se dice que $u \in H^1(U)$ es una solución débil de:

$$-\Delta u + cu = f \qquad \text{en} \quad U, \qquad\qquad \partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u = g \qquad \text{en} \quad \partial U, \tag{16}$$

si $a(u,v) = F(v)$ para toda $v \in H^1(U)$, donde $f \in L^2(U)$, $g \in L^2(\partial U)$, $c \in L^\infty(U)$, $c \geq 0$, $\alpha \in L^\infty(\partial U)$, $\alpha \geq 0$, y:

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_U c\, uv \, dx + \int_{\partial U} \alpha Tr(u) Tr(v) \, dS \qquad && u, v \in H^1(U), \\ F(v) &= \int_U fv \, dx + \int_{\partial U} g Tr(v) \, dS && v \in H^1(U), \end{aligned}$$

siendo Tr el operador de traza de $H^1(U)$ en $L^2(\partial U)$. Demostrar que si

$$\int_U c^2 \, dx + \int_{\partial U} \alpha^2 \, dS > 0, \tag{17}$$

entonces el problema (16) admite una única solución débil.

La siguiente propiedad se puede usar sin demostrar:

Sea V un subconjunto de U de medida positiva. Existe una constante $\gamma > 0$ tal que:

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq \gamma \, \|\nabla u\|_2^2 + \gamma \left(\int_V u \, dx \right)^2 \qquad \forall\, u \in H^1(U).$$

Demostración. Vamos a usar el teorema de Lax-Milgram para probar la existencia y unicidad de solución débil para (16), por lo que basta probar que a es bilineal, continua y coersiva, y que F es lineal y continuo.

La bilinealidad de a y la linealidad de F son consecuencia directa de la linealidad de la integral, de la derivada débil y del operador de traza.

Veamos ahora la continuidad de a. Sean $u, v \in H^1(U)$. Usando primero que $c \in L^\infty(U)$ y $L^\infty(\partial U)$, luego la desigualdad de Hölder y finalmente la continuidad del operador de traza, obtenemos:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_U |\nabla u||\nabla v| \, dx + \|c\|_\infty \int_U |u||v| \, dx + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial U)} \int_{\partial U} |Tr(u)||Tr(v)| \, dS \\ &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial U)} \|Tr(u)\|_{L^2(\partial U)} \|Tr(v)\|_{L^2(\partial U)} \\ &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 + C^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\partial U)} \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \\ &\leq (1 + \|c\|_\infty + C^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\partial U)}) \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}, \end{aligned}$$

donde C es la constante de continuidad de Tr. Por lo tanto a es continua. La continuidad de F se demuestra de manera similar: Para $v \in H^1(U)$ se tiene

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \int_U |f||v| \, dx + \int_{\partial U} |g||Tr(v)| \, dS \leq \|f\|_2 \|v\|_2 + \|g\|_{L^2(\partial U)} \|Tr(v)\|_{L^2(\partial U)} \\ &\leq \|f\|_2 \|v\|_2 + C \|g\|_{L^2(\partial U)} \|v\|_{1,2} \leq (\|f\|_2 + C \|g\|_{L^2(\partial U)}) \|v\|_{1,2}. \end{aligned}$$

Veamos, finalmente, que a es coersiva. Sea $u \in H^1(U)$. De acuerdo con (17), se tiene que $c \neq 0$ o $\alpha \neq 0$. Supongamos que $c \neq 0$. Luego, existen $V \subset U$ con $|V| > 0$ y $\delta > 0$ tales que $c \geq \delta$ en V. Entonces,

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \delta \int_V u^2 \, dx + \int_{U \setminus V} c \, u^2 \, dx + \int_{\partial U} \alpha |Tr(u)|^2 \, dS \\ &\geq \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \delta \int_V u^2 \, dx \geq \text{mín}\{1, \delta\} \left(\int_U |\nabla u|^2 \, dx + \int_V u^2 \, dx \right). \end{aligned}$$

Usando ahora que $\left(\int_V u \, dx\right)^2 \leq |V| \int_V u^2 \, dx$, junto con la propiedad sugerida en el enunciado, obtenemos:

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \text{mín}\{1, \delta\} \left(\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{|V|} \left(\int_V u \, dx \right)^2 \right) \\ &\geq \text{mín}\{1, \delta\} \, \text{mín} \left\{ 1, \frac{1}{|V|} \right\} \left(\|\nabla u\|_2^2 + \left(\int_V u \, dx \right)^2 \right) \\ &\geq \gamma^{-1} \, \text{mín}\{1, \delta\} \, \text{mín} \left\{ 1, \frac{1}{|V|} \right\} \|u\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

La prueba en el caso $c = 0$ es similar. En efecto, como $\alpha \neq 0$, existen $\Gamma \subset \partial U$ con $|\Gamma| > 0$ y $\delta > 0$ tales que $\alpha \geq \delta$ en Γ. Entonces, razonando como antes pero usando el Ejercicio 3 en lugar de la propiedad sugerida en el enunciado, se tiene:

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \int_U c \, u^2 \, dx + \delta \int_\Gamma |Tr(u)|^2 \, dS \int_{\partial U \setminus V} \alpha |Tr(u)|^2 \, dS \\ &\geq \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \delta \int_\Gamma Tr(u)^2 \, dS \geq \text{mín}\{1, \delta\} \left(\int_U |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Gamma Tr(u)^2 \, dS \right) \\ &\geq \mu^{-1} \, \text{mín}\{1, \delta\} \, \text{mín} \left\{ 1, \frac{1}{|V|} \right\} \|u\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto a es coersiva.