Métodos topológicos en el análisis no lineal - Práctica 5

1. Enunciar y probar una versión del teorema de la no-retracción para la bola unitaria de un espacio de Banach. *Comentario*: recordar que si el espacio tiene dimensión infinita, la esfera no es compacta.

2. Sea $K : L^2(0,T) \to L^2(0,T)$ un operador compacto. Probar que si $\int_0^T Kf(s)f(s))\,ds > 0$ para toda f de norma 1, entonces K tiene al menos un cero.

3. Dada la ecuación $u'' - \varphi(t)u = f(t,u,u')$, donde $f : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ es continua y sublineal en (u,u') y $\varphi \in C([0,1])$ satisface $\varphi(t) \geq 0$ para todo t, probar:

   (a) El problema de Dirichlet tiene al menos una solución.

   (b) Si además $\varphi \not\equiv 0$, entonces el problema periódico y el de Neumann tienen solución.

4. Condición de Hartman-Nagumo:

   Sea $f : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ continua tal que

   $$f(t,u,v) \cdot u + |v|^2 \geq 0 \qquad \text{para } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ con } |u| = R,\ v \perp u$$

   y

   $$|f(t,u,v)| \leq c\left(u \cdot f(t,u,v) + |v|^2\right) + K$$

   para $|u| \leq R$ y ciertas constantes c, K con $cR < 1$. Probar que el problema de Dirichlet

   $$\begin{cases} u'' = f(t,u,u') \\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

   con $|u_0|, |u_1| \leq R$ tiene al menos una solución. Deducir un resultado análogo para las condiciones periódicas.

   Sugerencia: obtener cotas para $u'(t)$ a partir de la identidad

   $$u'(t) = u(1) - u(0) + \int_0^t s u''(s)\,ds - \int_t^1 (1-s)u''(s)\,ds.$$

5. Sean $\alpha \leq \beta$ respectivamente una sub y una super solución del problema $u''(t) = f(t, u, u')$ con condición de Dirichlet o periódica. Supongamos que
$$|f(t, u, v)| \leq \varphi(|v|)$$
para todo t, $\alpha(t) \leq u \leq \beta(t)$ y $|v| \leq R$ para cierto R suficientemente grande. Sea $r = |u_1 - u_0|$ en el caso Dirichlet o $r = 0$ en el caso periódico. Probar que si
$$\int_r^R \frac{1}{\varphi(s)} ds > 1$$
entonces el problema tiene al menos una solución.

6. Probar que el problema
$$u'' = p(t) + u^5 + g(t, u')$$
con $p : [0, T] \to \mathbb{R}$ y $g : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y g acotada tiene al menos una solución T-periódica.

7. Consideremos la ecuación $u'' = f(t, u, u')$, con $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que
$$|f(t, u, v)| \leq c(u)(1 + v^2)$$
para cierta función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continua. Probar que para todo $k > 0$ existe $R = R(k)$ tal que si u es una solución tal que $|u(t)| \leq k$ en $[0, T]$ entonces $|u'(t)| \leq R$. Deducir un resultado de existencia de soluciones bajo distintas condiciones de contorno.

   Sugerencia: si $u' \neq 0$ en (t_0, t_1) y por ejemplo $u'(t_0) = 0$, escribir a t como función de u y definir $u_0 = u(t_0)$, $p(u) = u'(t)$ y $q = p^2$. Entonces
$$\frac{dq}{du} \leq 2c(1 + q(u)), \qquad q(u_0) = 0,$$
   de donde se deduce una cota para q. Analizar por separado el caso en que u' no se anula en $[0, T]$, empleando el teorema de Lagrange.

8. Probar que la ecuación
$$u''(t) + u'(t)^2 = -1$$
con condición de Dirichlet $u(0) = u(T) = 0$ no tiene solución para $T \geq \pi$. ¿Contradice esto el ejercicio anterior?