Métodos topológicos en el análisis no lineal
Práctica 4

1. Definir sucesiones monótonas que converjan a soluciones del problema

$$\begin{cases} u' = u^4 + \cos(t) - 1 \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases}$$

entre $\text{sen}(t)$ y $\text{sen}(t) + 2$.

2. Probar que la ecuación del péndulo forzado

$$u''(t) + \text{sen} u(t) = p(t)$$

con $\|p\|_\infty \leq 1$ admite dos soluciones T periódicas geométricamente distintas.

3. Calcular la función de Green para el operdor $-u'' + \lambda u$ correspondiente a las condiciones de Neumann $u'(0) = u'(T) = 0$ y deducir un principio del antimáximo.

   (a) Probar que el problema

   $$\begin{cases} u'' = u^3 + u \\ u(0) = u_0, \\ \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0 \end{cases}$$

   tiene al menos una solución. ¿Puede haber más de una?

   (b) Sea $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(t, u)sgn(u) \geq 0$ para $|u| \gg 0$. Supongamos además que para todo $M > 0$ existe $\varphi_M \in L^1(0, +\infty)$ tal que $|f(t, u)| \leq \varphi_M(t)$ para $|u| \leq M$. Probar que el problema

   $$\begin{cases} u'' = f(t, u) \\ u'(0) = u_0, \\ \lim_{t\to+\infty} u'(t) = 0 \end{cases}$$

   tiene al menos una solución.

4. Sea $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y decreciente en u.

(a) Probar que la aplicación $T : C([0,T]) \times \mathbb{R}^2 \to C^2([0,T])$ que a cada (p, u_0, u_T) le hace corresponder la única solución del problema

$$u'' + f(t,u) = p(t) \qquad u(0) = u_0,\ u(T) = u_T$$

está bien definida y es continua.

(b) Probar que si se piensa $T : C([0,T]) \times \mathbb{R}^2 \to C([0,T])$, entonces T es compacta (es decir: es continua, y envía conjuntos acotados en conjuntos de clausura compacta).

(c) Dada $p \in C([0,T])$, probar que el conjunto

$$S(p) = \{u \in C^2([0,T]) : u'' + f(t,u) = p(t)\}$$

es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Interpretar este hecho como una generalización del resultado conocido para la ecuación lineal

$$u'' + \varphi(t)u = p(t) \qquad \text{con} \quad \varphi \leq 0.$$

¿Cómo es $S(p)$ en este caso?

5. (a) Sea $\tilde{f} : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente en u, y sea $\tilde{u}$ una función que verifica

$$\tilde{u}'' = \tilde{f}(t,\tilde{u}) \qquad \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0,\ \tilde{u}(1) = \tilde{u}_1.$$

Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que si

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty < \varepsilon, \qquad |u_0 - \tilde{u}_0| < \varepsilon, \quad |u_1 - \tilde{u}_1| < \varepsilon$$

entonces el problema

$$u'' = f(t,u) \qquad u(0) = u_0,\ u(1) = u_1 \tag{1}$$

tiene al menos una solución. ¿Es única?

(b) Expresar el resultado de (5a) en términos de la topología del conjunto

$$\{(f, u_0, u_1) : (1) \text{ tiene solución}\} \subset C([0,T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2.$$

6. Escribir el método de Newton para el problema periódico $u'(t) = f(t, u(t))$.

7. Definir el método de Newton para el problema $u''(t) = f(t, u(t))$ con condición de Dirichlet a partir de la representación de Green.