Análisis no lineal - Práctica 3

1. Sean E, F espacios normados y $f : E \to F$ de clase C^1.

    (a) Probar que para todo $x, y \in E$ vale

    $$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$$

    donde $M := max_{t\in[0,1]}\|Df(tx + (1 - t)y)\|$.

    (b) Deducir que si $Df \equiv 0$ entonces f es constante.

    (c) Deducir que si E es completo, $F = E$ y $\|Df(x)\| \leq \alpha < 1$ para todo x entonces f tiene un único punto fijo.

2. Sea X un espacio de Banach, sea $A \subset L(X, X)$ el conjunto de operadores inversibles y $f : A \to L(E, E)$ dada por $f(T) = T^{-1}$. Probar que f es diferenciable y calcular $Df(T)$.

3. Sea $f : L(X, X) \to L(X, X)$ dada por $f(T) = T^k$. Probar que f es diferenciable. Si $TS = ST$, probar que $Df(T)(S) = kT^{k-1}S$.

4. Dado $T \in L(X, X)$, definimos $e^T := \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{n!}$.

    (a) Probar que la función $M \mapsto e^M$ está bien definida y es diferenciable. Calcular la derivada en la dirección N para N que conmuta con M.

    (b) Sea $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y $x : \mathbb{R} \to X$ la curva definida por $x(t) = e^{tM}x_0$. Probar que $x'(t) = Mx(t)$ y $x(0) = x_0$.

5. Generalizar los ejercicios anteriores para $M \in L(E, E)$, donde E es un espacio de Banach.

6. Sea $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y monótona creciente en u, es decir:

    $$[f(t, u) - f(t, v)] \cdot (u - v) \geq 0$$

    para todo $t \in [0, 1]$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Usando el teorema de la función implícita, probar que el problema de Dirichlet

    $$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

    tiene una única solución.

7. (a) Usando el TFI, probar que existe $\lambda_0 > 0$ tal que el problema

$$u''(t) + \lambda e^{u(t)} = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

tiene solución para $0 < \lambda < \lambda_0$.

(b) Probar que toda solución es positiva en $(0, 1)$.

(c) Probar que si λ es chico el problema tiene dos soluciones, y si λ es grande el problema no tiene soluciones.

Sugerencia: multiplicar la ecuación por $u'(t)$ e integrar. Observar que u es simétrica y alcanza un único máximo M en $t = \frac{1}{2}$, con

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^M \frac{dv}{\sqrt{e^M - e^v}} = \frac{1}{2}.$$

Recíprocamente, probar para cada M que verifica la igualdad anterior existe una solución u con $\|u\|_\infty = M$.

8. Obtener la expresión del polinomio de Taylor de orden k centrado en x_0 y fórmula del resto para una función $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1} donde A es un abierto de un espacio normado. *Sugerencia*: considerar el desarrollo de Taylor de $f \circ \varphi$, donde $\varphi(t) := x_0 + t(x - x_0)$.

9. Teorema de existencia y unicidad: sean $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Para cada $(t_0, x_0) \in A$ existe y de clase C^1 definida en un entorno de t_0 tal que $x'(t) = f(t, x(t))$ y $x(t_0) = x_0$. Por simplicidad, se puede suponer $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $t_0 = 0$. Definiendo $y(t) := x(\lambda t)$, el problema se transforma en $y'(t) = \lambda f(\lambda t, y(t))$, $y(0) = x_0$. Considerar la función $F : C([-1, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to C([-1, 1], \mathbb{R}^n)$ dada por $F(y, \lambda) = y - T(y, \lambda)$, donde

$$T(y, \lambda)(t) := x_0 + \lambda \int_0^t f(\lambda s, y(s))\, ds.$$

Entonces $F(x_0, 0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, 0) = I$. Esto dice que hay una curva y definida cerca de $\lambda = 0$ tal que $F(\lambda, y(\lambda)) = 0$.