Sobre el método de continuación. En la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, el *método de continuación* es una de las técnicas más conocidas para probar la existencia de soluciones periódicas en una ecuación diferencial dada, a través de la teoría del grado topológico. En las siguientes líneas describimos los pasos fundamentales de dicho método para la existencia de soluciones periódicas de la ecuación diferencial

$$u' = f(t,u), \tag{1}$$

en donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es continua y T-periódica en t. Las ideas aquí expuestas (con la excepción del Lema 0.1) provienen del curso de introducción a la teoría del grado topológico dado por el profesor Rafael Ortega en *School on Nonlinear Differential Equations.* International Center of Theoretical Physics, ICTP, Trieste-Italia. (2006)

Idea: "Deformar" de forma continua una ecuación diferencial conocida, en una ecuación diferencial (objeto de estudio), preservando alguna o varias propiedades cualitativas.

Paso 1. (Introducción de un parámetro y homotopía). Sea $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ y considere la familia de ecuaciones diferenciales paramétricas

$$u' = F(t,u,\lambda), \tag{2}$$

en donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times [0,\lambda_0] \to \mathbb{R}^m$ es continua y T-periódica en t, es decir, para cada $\lambda \in [0,\lambda_0]$ se cumple

$$F(t+T,u,\lambda) = F(t,u,\lambda), \quad \forall (t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Adicionalmente consideramos los siguientes supuestos

- $\diamond$ Para cada λ fijo, la función

  $$F(t,u,\lambda) \equiv F_\lambda(t,u),$$

  satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones para el problema de valor inicial

  $$\begin{aligned} u' &= F_\lambda(t,u), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{3}$$

- $\diamond$ La ecuación (1) se obtiene para un valor fijo del parámetro λ, suponga $\lambda = \lambda_0$, esto es:

  $$F_{\lambda_0}(t,u) = f(t,u).$$

Lo anterior nos conduce a considerar la homotopia $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times [0,\lambda_0] \to \mathbb{R}^m$. Por ejemplo, una homotopia usual sería

$$F(t,u,\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_0} f(t,u) - \frac{(\lambda-\lambda_0)}{\lambda_0} g(t,u)$$

con $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es continua y T-periódica en t.

Paso 2. (Búsqueda de cotas "a priori" para toda solución periódica). Supongamos que $u_\lambda(t) = u(t,\lambda)$ es una solución periódica de (2) esto es

$$u'_\lambda(t) = F_\lambda(t, u_\lambda(t)) \quad \text{y} \quad u_\lambda(t+T) = u_\lambda(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in [0, \lambda_0]$. En esta parte del método, se busca un número real $R > 0$ tal que

$$|u_\lambda(0)| < R,$$

para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$. El punto clave en este paso, es que la cota R debe ser independiente del valor λ considerado y de la solución periódica $u_\lambda(t)$.

Paso 3. (Aplicación de Poincaré y grado topológico). Sea $u_\lambda(t)$ una solución de (2) con $u_\lambda(0) = u_0$. Defina el conjunto

$$\mathcal{D}_{T,\lambda} = \{u_0 \in \mathbb{R}^m : u_\lambda(t) \text{ está bien definida en } [0,T]\}.$$

Es decir, $\mathcal{D}_{T,\lambda}$ es el conjunto de condiciones iniciales de $u_\lambda(t)$ (en $t = 0$) que nos garantizan que el intervalo máximal de definición contiene el intervalo $[0,T]$.

Se define el operador de Poincaré a la función $P_{T,\lambda} : \mathcal{D}_{T,\lambda} \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$P_{T,\lambda}(u_0) = u_\lambda(T).$$

Del teorema de existencia y unicidad de soluciones, el teorema de dependencia continua respecto a condiciones iniciales y parámetros y el teorema de invarianza de dominio, se comprueba que $\mathcal{D}_{T,\lambda}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$ y que $P_{T,\lambda}$ es un homemorfismo sobre su imagen. Ahora bien, si $u_\lambda(t)$ una solución de (2) definida en $[0,T]$ y satisface $u_\lambda(0) = u_\lambda(T)$, entonces $u_\lambda(t)$ puede prolongarse como una solución T-periódica. en la forma

$$\varphi_\lambda(t) = \begin{cases} u_\lambda(t), & \text{si} \quad t \in [0,T], \\ u_\lambda(t-T), & \text{si} \quad t \in [T, 2T]. \\ \dots \end{cases}$$

Se deduce entonces que los puntos fijos de P_T corresponden a las condiciones iniciales de las soluciones periódicas de (2). Por lo que, la búsqueda de soluciones T-periódicas se reduce al estudio de la ecuación

$$P_{T,\lambda}(u_0) = u_0, \quad u_0 \in \mathcal{D}_{T,\lambda} \subset \mathbb{R}^m.$$

o equivalentemente, el estudio de la ecuación

$$(I_m - P_{T,\lambda})(u_0) = 0, \quad u_0 \in \mathcal{D}_{T,\lambda} \subset \mathbb{R}^m.$$

A partir de lo anterior, el objetivo en este paso es verificar dos cosas:

▷ $\overline{B}_R(0) \subset \mathcal{D}_{T,\lambda}$, para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$

▷ $\deg(I_m - P_{T,0}, B_R(0), 0) \neq 0$.

con $\overline{B}_R(0) = \{u_0 \in \mathbb{R}^m : |u_0| < R\}$. Aquí es clave garantizar que la homotopía F propuesta en el Paso 1 tenga como ecuación inicial $u' = F_0(t,u)$ lo bastante simple como para que podamos calcular su grado respecto a $B_R(0)$. Si se logran comprobar los pasos 1, 2 y 3 se concluye la existencia de al menos una solución T-periódica de (1). La justificación de esta última afirmación se basa en las siguientes condiciones:

1. De la dependencia continua respecto a condiciones iniciales y parámetros, $(\lambda, u_0) \to P_{T,\lambda}(u_0)$ es continua.

2. De la cota a priori dada en el Paso 2, se tiene cumple

$$P_{T,\lambda}(u_0) \neq u_0, \quad \forall u_0 \in \partial B_R(0), \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_0]$$

   Esto quiere decir que no hay puntos fijos de $P_{T,\lambda}$ fuera de $B_R(0)$. Entonces, por la propiedad de invarianza bajo homotopia, el operador $I_m - P_{T,0}$ es homotópico a $I_m - P_{T,\lambda_0}$ en $B_R(0)$ y así:

$$0 \neq \deg(I_m - P_{T,0}, B_R(0), 0) = \deg(I_m - P_{T,\lambda_0}, B_R(0), 0).$$

   En consecuencia, por la propiedad de existencia de soluciones, existe un $u_* \in, B_R(0)$ tal que:

$$(I_m - P_{T,\lambda_0})(u_*) = u_* \quad \Leftrightarrow \quad P_{T,\lambda_0}(u_*) = u_*.$$

   En consecuencia, la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u' &= F_\lambda(t,u), \\ u(0) &= u_*. \end{aligned} \tag{4}$$

   es una solución T-periódica.

Ejemplo: Veamos como se aplica el método de continuación al problema de soluciones periódicas de la ecuación

$$y''(t) + \alpha y'(t) + y(t)^3 = p(t), \tag{5}$$

con $\alpha > 0$, p-continua, T-periódica y con promedio $\bar{p} = 0$.

1. Considere la familia de ecuaciones paramétricas,

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \lambda y(t)^3 + (1-\lambda) y(t) = \lambda p(t), \tag{6}$$

con $\lambda \in [0,1]$. Note (6) equivale al sistema de primer orden

$$u'(t) = F(t, u(t), \lambda) := \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\alpha y'(t) + \lambda(p(t) + y(t) - y(t)^3) - y(t) \end{pmatrix}$$

con $u(t) = (y(t), y'(t))^{tr}$ y $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

2. Considere el espacio de Hilbert $L^2([0,T])$ con el producto escalar

$$(f|g) = \int_0^T f(t)g(t)\,dt,$$

y supongamos que $y_\lambda(t)$ es una solución T-periódica de (6). Multiplicando la ecuación por y'_λ y luego integrando en $[0,T]$ resulta

$$\alpha\|y'_\lambda\|_{L^2} = \lambda\int_0^T p(t)y'_\lambda(t)\,dt.$$

En consecuencia, usando Cauchy-Schwarz

$$\|y'_\lambda\|_{L^2} \le \frac{\lambda\|p\|_{L^2}}{\alpha} \le \frac{\|p\|_{L^2}}{\alpha}, \qquad (*)$$

para todo $\lambda \in [0,1]$. Por otra parte, integrando la ecuación en un periodo se tiene

$$\int_0^T \big(\lambda y_\lambda(t)^3 + (1-\lambda)y_\lambda(t)\big)\,dt = 0.$$

Por el teorema del valor medio, existe $t_0 = t_0(\lambda) \in [0,T]$ tal que

$$\lambda y_\lambda(t_0)^3 + (1-\lambda)y_\lambda(t_0) = 0.$$

Se deduce entonces que $y_\lambda(t_0) = 0$ para todo $\lambda \in [0,1]$. De nuevo, usando Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$|y_\lambda(t)| \le \int_{t_0}^t \big|y'_\lambda(s)\big|\,ds \le |t-t_0|^{1/2}\Big(\int_{t_0}^t \big|y'_\lambda(s)\big|^2\,ds\Big)^{1/2}.$$

De $(*)$ se sigue

$$|y_\lambda(t)| \le \frac{T^{1/2}\|p\|_{L^2}}{\alpha} := \Gamma_1$$

para todo $t \in [0,T]$ y $\lambda \in [0,1]$. De la periodicidad de $y_\lambda(t)$ existe t_1 tal que $y'_\lambda(t_1) = 0$. Por lo tanto

$$y'_\lambda(t) = \int_{t_1}^t y''_\lambda(s)\,ds = \int_{t_1}^t \big(-\alpha y'_\lambda(s) + \lambda(p(s) + y_\lambda(s) - y_\lambda(s)^3) - y_\lambda(s)\big)\,ds,$$

Asi tenemos

$$\begin{aligned}|y'_\lambda(t)| &\le \alpha\int_0^T |y'_\lambda(s)|\,ds + (1-\lambda)\int_0^T |y_\lambda(s)|\,ds + \int_0^T |y_\lambda(s)|^3\,ds + \lambda\int_0^T |p(s)|\,ds \\ &\le \alpha T^{1/2}\frac{\|p\|_{L^2}}{\alpha} + \frac{T^{3/2}\|p\|_{L^2}}{\alpha} + \frac{T^{5/2}\|p\|^3_{L^2}}{\alpha^3} + T^{1/2}\|p\|_{L^2} := \Gamma_2\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$ y $\lambda \in [0,1]$. En consecuencia, una cota uniforme para una posible solución T-periódica y_λ y su derivada y'_λ esta dada por

$$\|(y_\lambda, y'_\lambda)^{tr}\|_\infty = \max_{[0,T]}\big\{|y_\lambda(t)|, |y'_\lambda(t)|\big\} := R.$$

3. Afirmamos que dado cualquier punto $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, las soluciones del problema de valor inicial

$$y''(t) + \alpha y'(t) + y(t)^3 = p(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0',$$

están definidas para todo $t \geq 0$. En efecto, multiplicando la ecuación por $y'(t)$ se obtiene

$$\left(\frac{y'(t)^2}{2} + \frac{y(t)^4}{4} \right)' = p(t)y'(t) - \alpha y'(t)^2,$$

y luego

$$\frac{y'(t)^2}{2} + \frac{y(t)^4}{4} \leq C + \int_0^t p(s)y'(s)\, ds,$$

donde $C = \frac{{y_0'}^2}{2} + \frac{y_0^4}{4}$. Supongamos que la solución está definida en $[0, t_0]$ y sea $t_1 \leq t_0$ tal que $|y'(t_1)| = \max_{[0,t_0]} |y'(t)|$. Se deduce que

$$\frac{y'(t_1)^2}{2} \leq C + |y'(t_1)| \int_0^{t_1} |p(s)|\, ds \leq C + t_0 |y'(t_1)| \|p\|_\infty.$$

Completando cuadrados, se obtiene

$$|y'(t_1)| \leq t_0 \|p\|_\infty + \sqrt{2C + t_0^2 \|p\|_\infty^2},$$

y por la teoría clásica de prolongación de soluciones se concluye el resultado. Asi que para todo $\lambda \in [0, 1]$. Lo anterior nos permite comprobar

$$\overline{B}_R(0) \subset D_{T,\lambda} = \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Veamos que información tenemos para $\lambda = 0$. En este caso se tiene la ecuación lineal

$$y''(t) + \alpha y'(t) + y(t) = 0,$$

que equivale al sistema

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} u(t), \tag{7}$$

con $u(t) = (y(t), y'(t))^{tr}$ y $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. En este punto recurrimos al siguiente resultado

Lema 0.1 *Sea $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y P_T el operador de Poincaré asociado al sistema de lineal de ecuaciones diferenciales $u'(t) = Mu(t)$ para algún T fijo. Si el sistema no admite soluciones T-periódicas no triviales, entonces*

$$\deg(I - P_T, V, 0) = (-1)^N sgn(\det(M)),$$

en cualquier vecindad $V \subset \mathbb{R}^N$ del origen.

Proof: Por definición,

$$(I - P_T)(u) = \left(I - e^{TM}\right) u.$$

Escriba M en su forma de Jordan (posiblemente compleja) $M = C^{-1}JC$, con J triangular superior. Entonces

$$\det\left(I - e^{TM}\right) = \det\left(I - e^{TJ}\right) = \prod_{j=1}^{N}\left(1 - e^{\lambda_j T}\right),$$

en donde λ_j son los valores propios de M. Ahora note que si $\lambda = a + ib \notin \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\left(1 - e^{\lambda T}\right)\left(1 - e^{\overline{\lambda} T}\right) &= 1 - 2e^{aT}\cos(bT) + e^{2aT} \\ &= |1 - e^{\lambda T}|^2.\end{aligned}$$

Dado que no existen soluciones periódicas no triviales, tenemos $|1 - e^{\lambda T}| > 0$. De esto último se también se deduce que los valores propios complejos no afectan el signo de $\det\left(I - e^{TM}\right)$, lo mismo ocurre con el signo de $\det(M)$ dado que $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$. El resultado sigue del hecho que para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$sgn\left(1 - e^{\lambda T}\right) = -sgn(\lambda).$$

□

Del Lema 0.1 tenemos que para el sistema (7) se cumple

$$\deg(I - P_{T,0}, B_R(0), 0) = 1.$$

En este punto el lector puede notar que hemos verificado los tres pasos del método de continuación, por lo tanto podemos concluir que la ecuación (5) tiene al menos una solución T-periódica.

Recordando la homotopia propuesta por M. A. Krasnoselskii. A continuación presentamos una desmotración alternativa siguiendo las ideas de Krasnoselskii

Si $P_{\hat{T}}(y_0, v_0) = (y_0, y_0')$ para cierto $\hat{T} \in (0, T]$, (es decir, existe una solución $\hat{T}$-periódica) entonces vale

$$\int_0^{\hat{T}} \alpha y'(t)^2\, dt = \int_0^{\hat{T}} p(t) y'(t)\, dt,$$

de donde

$$\|y'\|_{L^2(0,\hat{T})} \leq \frac{\|p\|_{L^2(0,\hat{T})}}{\alpha} \leq \frac{\|p\|_{L^2(0,T)}}{\alpha}.$$

Además

$$\int_0^{\hat{T}} y(t)^3\,dt = \int_0^{\hat{T}} p(t)\,dt,$$

de donde se deduce que existe t_0 tal que $y(t_0)^3 = p(t_0)$, es decir: $\|y\|_\infty \leq \|p\|_\infty^{1/3}$. Finalmente, por Rolle existe t_1 tal que $y'(t_1) = 0$ y luego

$$|y'(t)| = \left|\int_{t_1}^{t} y''(s)\,ds\right| \leq \hat{T}\|y\|_\infty^3 + \hat{T}^{1/2}(\|p\|_{L^2(0,\hat{T})} + \alpha\|y'\|_{L^2(0,\hat{T})}).$$

Luego, existe R independiente de $\hat{T}$ tal que $y(t)^2 + y'(t)^2 < R^2$ para todo $t \leq \hat{T}$. De esta forma, $P_{\hat{T}}$ no tiene puntos fijos fuera de $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$. Luego, podemos pensar $\hat{T} = \lambda T$ y definir la homotopía

$$h(y_0, y_0', \hat{T}) = \begin{cases} \frac{(y_0,y_0') - P_{\hat{T}}(y_0,y_0')}{\lambda} & 0 < \lambda \leq 1, \\ T(-y_0', -p(0) + y_0^3 + \alpha y_0') & \hat{T} = 0, \end{cases}$$

que es continua porque

$$\lim_{\hat{T}\to 0} \frac{(y_0, y_0') - P_{\hat{T}}(y_0, y_0')}{\hat{T}} = -(y'(0), y''(0)),$$

donde y es la solución con valor inicial (y_0, y_0'). Como h no se anula en $\partial B_R(0)$, alcanza con calcular el grado de $\phi(y_0, y_0') := (-y_0', -p(0) + y_0^3 + \alpha y_0')$. Pero es claro que ϕ es suave y se anula solamente en el punto $(p(0)^{1/3}, 0)$. Además,

$$D\phi(p(0)^{1/3}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3p(0)^{2/3} & \alpha \end{pmatrix},$$

cuyo jacobiano vale 1 si $p(0) \neq 0$, es decir, $\deg(\phi, B_R(0), 0) = 1$. En cambio, si $p(0) = 0$, alcanza con tomar $a > 0$ chico y vale

$$\deg(\phi, B_R(0), 0) = \deg(\phi, B_R(0), (0, a)) = 1.$$

De esta forma, el grado de $I - P_T$, que coincide con el de $h(\cdot, 1)$ vale 1.