Métodos topológicos en el análisis no lineal
Todo sobre Picard (versión preliminar)

Vamos a repasar algunas cuestiones básicas de ecuaciones diferenciales, en especial las involucradas en el teorema de existencia y unicidad, extensión de soluciones y dependencia continua respecto de los parámetros. Supongamos entonces que $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz en la variable X, con $\Omega \subset \mathbb{R}^\times\mathbb{R}^n$ un abierto. Para $(t_0, X_0) \in \Omega$ podemos fijar un compacto $K = [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B_R(X_0)} \subset \Omega$, donde $B_R(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : |X - X_0| < R\}$.[1] El método de Picard se basa en construir una sucesión de soluciones aproximadas X_n tales que $(t, X_n(t)) \in K$ para todo t. Uno podrá preguntarse por qué pedimos esto y no dejamos a las soluciones escaparse de donde quieran; sin embargo, la estrategia es clara: al fijar el compacto K, podemos también fijar una constante de Lipschitz L para F y el valor $M := \|F|_K\|_\infty$, que nos servirán para garantizar la convergencia de la sucesión X_n a una solución X. Después X será libre de ampliar sus horizontes todo lo que le venga en gana (o, más bien, todo lo que pueda).

La iteración de Picard consiste en tomar un $\delta \leq h$ y definir

$$X_0(t) \equiv X_0,$$

$$X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))\, ds \qquad |t - t_0| \leq \delta.$$

Llegado este punto, podemos decir: muy bien, no tengo problema con X_0 y tampoco con X_1 pero, ¿qué pasa con lo que viene después? Nada nos asegura, en cada paso, que la flamante trayectoria $(t, X_n(t))$ recién definida viva dentro de K: peor aún, podría escaparse de Ω, con lo cual X_{n+1} ni siquiera estaría definida. Justamente de eso se trata: vamos a elegir δ con buen tino (por no decir 'picardía'), a fin de garantizar que todas las trayectorias se mantienen en K. Y la manera de hacerlo es bastante típica cuando uno trabaja en ecuaciones diferenciales, una modalidad parecida a la que se propone en Alicia en el país de las maravillas: *Empieza por el principio, sigue hasta llegar al final y entonces para.* En nuestro caso, algo menos maravilloso, vamos a hacer las cuentas fingiendo que está todo bien y, al final del camino, ver qué le teníamos que pedir a δ para que la ficción se vuelva realidad.

[1] Seguramente todos sospechaban que nos referíamos a la bola. Pero lo escribimos para, de paso, recordar al lector que usamos la notación $|\cdot|$ indistintamente para referirnos al módulo de un número o a la norma (la que guste) de un vector de $\mathbb{R}^n$.

Pero basta de tonterías y manos a la obra. En principio, observemos que si "está todo bien", es decir, que todas las trayectorias viven en K hasta cierto n (a quien le gusten las formalidades, puede llamar a esto *hipótesis inductiva*) entonces vale, para $|t - t_0| \leq \delta$,

$$|X_{n+1}(t) - X_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))\, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |F(s, X_n(s))|\, ds \right|.$$

Aquí se podría objetar que una vez que pusimos la norma dentro de la integral ya no hace falta poner el módulo grandote que está afuera; sin embargo, hay que tener en cuenta que no sabemos si t es mayor o menor que t_0. Como sea, lo verdaderamente importante es que

$$|X_{n+1}(t) - X_0| \leq M|t - t_0| \leq M\delta$$

para todo t, de modo que para mantenernos dentro de K basta pedir que $\delta M \leq R$.

Y, en tren de pedir, veamos qué más hace falta para lograr que esta sucesión ya bien definida converga a cierta función X. Y, ya que estamos, sería genial que X sea solución, ¿no? Pero esto último es fácil siempre que la convergencia de X_n a X sea uniforme: en tal caso, tomando límte en la fórmula que define la iteración de Picard se obtiene

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\, ds \qquad |t - t_0| \leq \delta.$$

Hacia eso vamos, entonces: intentaremos encontrar una condición suficiente para garantizar la convergencia uniforme de $\{X_n\}$. No es preciso en realidad mencionarlo, pero cabe observar que estamos trabajando en el espacio de Banach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$; más precisamente, dentro de la bola cerrada de radio R centrada en X_0 (no pensado como un elemento de $\mathbb{R}^n$ sino como la función constante). Esto va a ser importante cuando veamos otra forma de resolver el problema, empleando directamente el teorema de la contracción. Notemos en primer lugar que para $n, m \geq 1$ cualesquiera y $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ vale

$$|X_n(t) - X_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} F(s, X_{n-1}(s)) - F(s, X_{m-1}(s))\, ds \right| \leq L\delta \|X_{n-1} - X_{m-1}\|_\infty$$

es decir

$$\|X_n - X_m\|_\infty \leq L\delta \|X_{n-1} - X_{m-1}\|_\infty$$

y, en particular

$$\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \leq L\delta \|X_n - X_{n-1}\|_\infty \leq \ldots \leq (L\delta)^n \|X_1 - X_0\|_\infty$$

Ahora, es natural pretender que las distancias se vayan achicando, así que pediremos $\delta L < 1$, con lo cual la cosa tiene cada vez más pinta de contracción. Y usando desigualdad triangular (o mejor dicho, cuadrangular), resulta

$$\|X_n - X_m\|_\infty \leq L\delta(\|X_{n-1} - X_n\|_\infty + \|X_n - X_m\|_\infty + \|X_m - X_{m-1}\|_\infty).$$

o bien, pasando términos de aquí para allá:

$$\|X_n - X_m\|_\infty \le \frac{L\delta[\|X_{n-1} - X_n\|_\infty + \|X_m - X_{m-1}\|_\infty]}{1 - L\delta}$$

En definitiva,

$$\|X_n - X_m\|_\infty \le \frac{(L\delta)^n + (L\delta)^m}{1 - L\delta}\|X_1 - X_0\|_\infty,$$

lo que prueba que la sucesión es (uniformemente) de Cauchy.

Como dijimos en el apunte, la unicidad es otro cantar: más precisamente, el cantar de Gronwall, que tal vez no parezca muy melodioso pero va a ser fundamental para demostrar unas cuantas propiedades de las soluciones. Conviene recordar entonces tan renombrado lema:

Lema 0.1 *Sean* $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *continuas y* $\alpha \ge 0$ *tales que*

$$u(t) \le \alpha + \int_a^t u(s)v(s)\,ds \qquad t \in [a, b].$$

Entonces

$$u(t) \le \alpha e^{\int_a^t v(s)\,ds} \qquad t \in [a, b].$$

Demostración: Definamos las primitivas $V(t) = \int_a^t v(s)\,ds$ y $W(t) = \int_a^t u(s)v(s)\,ds$, luego la hipótesis implica

$$u(t)v(t) \le (\alpha + W(t))v(t),$$

es decir:

$$W' \le (\alpha + W)V'$$

Luego

$$(e^{-V}W)' = e^{-V}(W' - V'W) \le \alpha e^{-V}V' = -\alpha(e^{-V})'$$

En otras palabras, la función $e^{-V}W + \alpha e^{-V}$ es decreciente y, en consecuencia,

$$e^{-V}W + \alpha e^{-V} \le [e^{-V}W + \alpha e^{-V}]|_{t=a} = \alpha.$$

De esta forma,

$$u \le \alpha + W \le \alpha e^V.$$

□

El lema de Gronwall se aplica de manera directa a la forma integral del problema de valores iniciales. Con eso se puede ver la unicidad y, por el mismo precio, la dependencia continua. En efecto, si X e Y son soluciones de la ecuación definidas en un intervalo J, podemos fijar un compacto $K \subset \Omega$ que contiene a los gráficos de X y de Y y llamar L a la constante de Lipschitz de F sobre ese compacto. Entonces para $t_0, t \in J$ con $t_0 \le t$ se tiene:

$$|X(t) - Y(t)| \le |X(t_0) - Y(t_0)| + \int_{t_0}^t |F(s, X(s)) - F(s, Y(s))|\,ds$$

$$\leq |X(t_0) - Y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} L|X(s) - Y(s)|\, ds.$$

Empleando Gronwall con $v = L$, se deduce

$$|X(t) - Y(t)| \leq |X(t_0) - Y(t_0)|e^{L(t-t_0)}.$$

La cuenta es similar para $t \leq t_0$, de modo que en general vale

$$|X(t) - Y(t)| \leq |X(t_0) - Y(t_0)|e^{L|t-t_0|}.$$

Esto muestra que si X e Y coinciden en un punto, tienen que ser iguales pero, más aún: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de J) tal que si $|X(t_0) - Y(t_0)| < \delta$ entonces $|X(t) - Y(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in J$.

Pregunta: ¿será cierto que alcanza con tomar δ tal que $\delta e^{LT} < \varepsilon$? Por como planteamos la pregunta, todo parece indicar que la respuesta va a ser negativa, y la explicación de esto es bastante obvia: el compacto K (y en consecuencia la constante L) los elegimos conociendo de antemano las funciones X e Y. La manera correcta de verlo es la siguiente: dada una solución X tal que $X(t_0) = X_0$, fijamos una franja de radio ε alrededor de su gráfico y entonces... el resto queda como ejercicio. También se puede ver que la dependencia es continua respecto de los dos parámetros iniciales, no solo el valor X_0 sino también t_0.

Sin ánimo de extendernos demasiado, vamos de todas formas a extendernos un poquito: la idea es ver ahora bajo qué condiciones las soluciones se pueden prolongar. Y aquí se puede aplicar nuevamente la filosofía de Carroll, modificada apenas: mientras podamos seguir, sigamos. Por simplicidad vamos a verlo para $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, aunque en la práctica 0 aparece una versión más general:

Proposición 0.1 *Sea X una solución definida en $[t_0, t_1)$ que no se puede extender hasta t_1. Entonces*

$$\lim_{t \to t_1^-} |X(t)| = \infty.$$

Para la demostración, alcanza con observar que si $|X|$ no se va a infinito, entonces existe una sucesión $t_n \nearrow t_1$ tal que $X(t_n)$ converge a cierto X_1. Pero ahora recordemos lo que hicimos en la prueba del teorema de existencia y unicidad: primero fijamos un compacto K, que nos permitió fijar constantes L y M. Luego vimos que alcanzaba con tomar $\delta < \min\{\frac{R}{M}, \frac{1}{L}\}$. El punto clave es que ese mismo valor de δ sirve también para $(\tilde{t}_0, \tilde{X}_0)$ cerca de (t_0, X_0). Así que la idea es clara: si ahora elegimos un δ que permita definir una solución con condición inicial cercana a (t_1, X_1), para n suficientemente grande hay una solución definida hasta $t_n + \delta$ que pasa por el punto $(t_n, X(t_n))$. Agrandando n si hace falta, tenemos $t_n + \delta > t$ y la unicidad (con ayuda del lector) se encarga del resto.

Para terminar, vamos a ver de manera esquemática que las soluciones no solo son continuas respecto de los valores iniciales sino también diferenciables, cuando la F es suave. En realidad, salen tan buenas como lo sea la F. Por simplicidad vamos a limitarnos al caso $n = 1$. Resulta conveniente definir el *flujo* Φ dado por

$$\Phi(t, t_0, X_0) = X(t),$$

donde X es la solución del problema tal que $X(t_0) = X_0$. Por supuesto, no está muy claro cuál es el dominio de Φ, aunque gracias a la dependencia continua se puede ver que es abierto (ver práctica 0). Y ahora vamos a aplicar otra vez el método carrolliano, esta vez de manera temeraria, algo así como: "todavía no sé si Φ es diferenciable, pero... ma, sí, la derivo y veo que pasa". La idea es ver qué propiedades debería cumplir por ejemplo la derivada $W(t, t_0, X_0) := \frac{\partial \Phi}{\partial X_0}(t, t_0, X_0)$ y, con esa información tratar de ver que W efectivamente existe.

Observemos, en primer lugar, que la ecuación puede escribirse de esta forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t, \Phi)$$

Y, ya que estamos, también podemos recordar la condición inicial:

$$\Phi(t_0, t_0, X_0) = X_0.$$

Por comodidad, evitamos escribir todas las variables; de todas maneras lo que estamos haciendo ya es bastante sospechoso. Pero si alguien a esta altura está horrorizado, el próximo paso le pondrá directamente los pelos de punta: vamos a derivar ambos términos respecto de X_0. Por supuesto, tampoco tendremos empacho en usar el hecho de que las derivadas segundas conmutan; de esta forma, por regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial X}(t, \Phi)W.$$

Además se tiene una bonita condición inicial:

$$W(t_0, t_0, X_0) = 1.$$

Si ahora dejamos quietas las variables t_0 y X_0 y resolvemos la ecuación diferencial para W como función de t, obtenemos

$$W(t, t_0, X_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial X}(s, \Phi)\, ds}$$

que (punto a nuestro favor) al menos ya sabemos que resulta una función continua. Muy bien: eso es lo que debería ocurrir si W existe y es buena; llega ahora el momento de verificar (usando el cociente incremental, como cualquier hijo de vecino) que efectivamente esta función es la derivada que estamos buscando. Pero justo tenemos algo que hacer, así que la tarea quedará a cargo del lector. A modo de pequeña ayuda, el 'instructivo' sería el siguiente:

1. Escribir la forma integral general para el flujo:

$$\Phi(t, t_0, X_0 + h) = X_0 + h + \int_{t_0}^{t} F(s, \Phi(s, t_0, X_0 + h))\, ds.$$

2. Probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(t,t_0,X_0+h)-\Phi(t,t_0,X_0)}{h} - W(t,t_0,X_0) = 0,$$

donde W es "la que supimos conseguir", que también se puede escribir en forma integral. Esto explica nuestros oscuros procedimientos previos: calcular directamente el límite del cociente incremental, sin saber quién es W, se pone más bien feo.

De manera análoga se puede ver la diferenciabilidad de Φ respecto a t_0 (a modo de comentario pretendidamente jocoso, podemos agregar que, felizmente, la diferenciabilidad respecto de t ya la sabemos).

Comentario final: Picard también usó el método de aproximaciones sucesivas para un problema como el que vimos en clase,

$$u''(t) = f(t,u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0.$$

Queda como ejercicio probar que la iteración

$$u''_{n+1}(t) = f(t,u_n(t)), \qquad u_n(0) = u_n(T) = 0$$

está bien definida y, si f es *globalmente* Lipschitz en u con constante L suficientemente chica, entonces la sucesión converge a una solución (que además es única). El punto inicial u_0 puede ser cualquiera; por ejemplo, se puede elegir $u_0 \equiv 0$.