Análisis 1 - Alimentos - 2° cuatrimestre 2020 (virtual)

Práctica 3

Conjuntos en la recta, el plano y el espacio

Subconjuntos de la recta

1. Hallar el conjunto $S \subset \mathbb{R}$ de soluciones de las siguientes siguientes inecuaciones. En cada caso hallar (si tiene) el supremo e ínfimo, y el máximo y mínimo de S.

   a) $|x+3| < 1$ *b*) $|3x-1| < |x-1|$ *c*) $|x-3| \geq 1$

   d) $x^2 > |x+3|$ *e*) $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$ *f*) $|x-3| < 2-x$

   g) $0 < x^2 \leq x^3$ *h*) $|x+3| + |x-9| > 2$ *i*) $\big||x+2| - |x-1|\big| < 1$

2. Decidir cuáles de los conjuntos del ejercicio anterior son abiertos, cuáles cerrados, cuales no son ninguna de las dos cosas.

3. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

   a) $a < a^2$ *b*) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$
   c) $a > 0 \Rightarrow ab \geq b$. *d*) $a + b \geq \text{máx}\{a, b\}$

4. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

   a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35\}$ *b*) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

   c) $A = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ *d*) $A = \{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$.

Subconjuntos del plano y el espacio

5. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}^2$. Representar las soluciones en el plano.

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$ *b*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| > 2\}$

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *d*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

   e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$ *f*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2| + |y+1| \geq 1\}$

   g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|; |y|\} = 1\}$ *h*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|; |y|\} < 1\}$

6. Mostrar que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$;
   b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$;
   c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$.

7. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son compactos (cerrados y acotados):

   a) $A = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

   b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

   c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;

   d) $A = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

   e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

8. Representar gráficamente los siguientes conjuntos A; decidir cuáles son abiertos, cuáles cerrados y cuáles ninguna de las dos cosas. De los cerrados, ¿cuáles son compactos?

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + (y - 1)^2 \leq 3\}$

   b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 5x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, |y| \leq \sqrt{5}\}$

   c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} < 1\}$

   d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge (0 \leq z \leq 1/2) \wedge (x + y + z < 1)\}$

   e) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z \geq 0) \wedge (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)\}$

9. Caracterizar (gráfica o analíticamente) los conjuntos A°, $bd(A)$, $\bar{A}$, $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus bd(A)$, para los conjuntos A que aparecen en los Ejercicios 8 y 7.

10. Dar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y dibujarlo. Decidir cuáles dominios son abiertos o cerrados:

    a) $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$

    b) $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

    c) $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{-1/2} + \sqrt{y - x^2}$

    d) $f(x, y) = 1/x$

    e) $f(x, y) = \dfrac{\ln(1 - y + x^2)}{\operatorname{sen} x}$

    f) $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$

    g) $f(x, y) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$

    h) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

11. Hacer un gráfico aproximado de cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cambiando de coordenadas cuando sea necesario.

    a) $f(x, y) = 1 - x - y$

    b) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

    c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

    d) $f(x, y) = x^2$

    e) $f(x, y) = 2xy$

    f) $f(x, y) = 4x^2 - 3y^2$

    g) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$

    h) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$

    i) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$

    j) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4xy$

12. Estudiar las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

a) $z = 2x^2 + y^2$ *b*) $z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2}$ *c*) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

d) $x^2 + y^2 = 4z^2$ *e*) $z^2 = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} - 2$ *f*) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

13. Para distintos valores de c dibujar las curvas de nivel $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$.

a) $f(x, y) = x + y$ *b*) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *c*) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

d) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$ *e*) $f(x, y) = x^2 - y^2$ *f*) $f(x, y) = xy$

g) $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$ *h*) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$ *i*) $f(x, y) = |x - 1| + |y|$.

14. Para distintos valores de w graficar la superficie de nivel $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = w\}$.

a) $f(x, y, z) = x + y + z$ *b*) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *d*) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2$

e) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ *f*) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$

g) $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 - z^2$ *h*) $f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 3z^2$

15. Hacer un dibujo aproximado de las siguientes superficies en $\mathbb{R}^3$, llevando la función cuadrática a su forma canónica

a) $2xy - z = 0$ *b*) $z = 2x^2 + 2y^2 - 2xy$ *c*) $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2yz = 1$

d) $z = x^2 + y^2 + 2xy$ *e*) $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 + z^2$ *f*) $2x^2 + 2xy + 2y^2 = z^2 - 1$

g) $x^2 = 2xy - 2xz - 2yz$ *h*) $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = 2$ *i*) $4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz = 1$