ALGEBRA LINEAL - Práctica N°10 - Segundo cuatrimestre de 2020
Formas bilineales

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo calcular su matriz en la base canónica correspondiente y determinar si la forma bilineal es simétrica:

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = -x_1.y_1 - x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + 2.x_1.y_2$

iii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1^2 + x_2.y_1 + x_1.y_2 - x_2^2$

iv) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_3.y_3 - x_1.y_3 - x_3.y_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + (2+i).x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + (2+i).x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_3.y_1 - x_3.y_3$

vi) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = (3.x_1 + x_2 - x_3).(4.y_2 + 2.y_3)$

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones son formas bilineales:

i) $\Phi : K^n \times K^n \to K$, $\Phi(x, y) = x.A.y^t$, donde $A \in K^{n\times n}$.

ii) $\Phi : V \times V \to K$, $\Phi(v, w) = f_1(v).f_2(w)$, donde V es un K-espacio vectorial y $f_1,\ f_2 \in V^*$.

iii) $\Phi : K^{m\times n} \times K^{m\times n} \to K$, $\Phi(A, B) = tr(A^t.C.B)$, donde $C \in K^{m\times m}$.

Ejercicio 3.

i) Para las formas bilineales sobre $\mathbb{R}^3$ del Ejercicio 1, calcular su matriz en la base $\{(1, 2, 4), (2, -1, 0), (-1, 2, 0)\}$.

ii) Para las formas bilineales simétricas del Ejercicio 1 calcular su núcleo.

Ejercicio 4. Hallar una forma bilineal Φ simétrica en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(\Phi) = <(1, 2, -1)>$ y $\Phi((1, 1, 1),(1, 1, 1)) < 0$. Calcular la matriz de Φ en la base canónica.

Ejercicio 5. Para cada una de las formas bilineales reales siguientes hallar una base ortonormal tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

i) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 2.x_1.y_3 + 2.x_3.y_1 - x_3.y_3 - x_4.y_4$.

Ejercicio 6. Para cada una de las formas bilineales simétricas reales dadas en la base canónica por las matrices siguientes, hallar una base tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal con 1, -1 y 0 en la diagonal. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que la forma bilineal que tiene a A como matriz en la base canónica es definida negativa si y sólo si los signos de los menores principales van alternándose comenzando por un signo menos.