Def. Sean E/k y F/k dos extensiones, definimos: $EF := k(E \cup F) = E(F) = F(E)$

"el menor cuerpo que contiene a ambos" (dentro de algún cuerpo que los contenga)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L \arrow[d, dash] & \\
 & EF & \\
E \arrow[ur, dash] & & F \arrow[ul, dash] \\
 & K \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Prop 1)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & EF & \\
E \arrow[ur, dash] & & F \arrow[ul, dash, "\text{alg, fin}"'] \\
 & K \arrow[ul, dash, "\text{alg, fin}"] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

y si E/k es finita: $[EF:F] \leq [E:k]$

2)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & EF & \\
E \arrow[ur, dash] & & F \arrow[ul, dash] \\
 & K \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] \arrow[uu, dash] &
\end{tikzcd}$$

$[EF:k]$ es alg (fin) $\iff$ E/k y F/k son alg (fin.)

Ej: $\left[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}, \zeta_3] : \mathbb{Q}[\zeta_3]\right] = \ ?$ $(= e)$

$\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}](\mathbb{Q}[\zeta_3]) = \mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}, \zeta_3]$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}, \zeta_3] & \\
\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}] \arrow[ur, dash, "d \leq 2"] & & \mathbb{Q}[\zeta_3] \arrow[ul, dash, "e"'] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, dash, "6"] \arrow[ur, dash, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

$(m_{\sqrt[6]{5}, \mathbb{Q}} = x^6 - 5)$

Pero si $d = 1$.

$\Rightarrow \zeta_3 \in \mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}] \subseteq \mathbb{R}$

$\zeta_3 \notin \mathbb{R}$ **Abs**

Luego. $d = 2$, $\therefore$ Rta. $e = 6$

Ej. 2) E/k, $f, g \in k[x]$ irreducibles, tq $(gr(f) : gr(g)) = 1$, Sean $\alpha, \beta \in E$ tq $f(\alpha) = g(\beta) = 0$. Entonces f es irreducible en $k[\beta][x]$.

$$
\begin{tikzcd}
 & k(\alpha,\beta) = k[\beta][\alpha] & \\
K[\alpha] \arrow[ur, dash, "gr(g)"] & & k[\beta] \arrow[ul, dash, "gr f"'] \\
 & K \arrow[ul, dash, "gr f"] \arrow[ur, dash, "gr g"'] &
\end{tikzcd}
$$

$gr f \longrightarrow$ Pues $(gr f \cdot gr g) = 1$

Luego: $f = m_{\alpha, k[\beta]}$

$\Rightarrow f$ irred en $k[\beta][x]$

Def. Sea k un cuerpo, definimos

$$k[[x]] := \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \ a_n \in K \right\}$$ "series formales",

con '+' y '·' "naturales".

Obs 1) $k[[x]]$ es un anillo.

2) $k[[x]]^{\times} = ?$

Si:

$$
\begin{array}{rl}
 & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
\times & b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \\
\hline
 & 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots
\end{array}
$$

$\Rightarrow a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = 1/a_0$ (Necesito $a_0 \neq 0$)

y sigo: $b_1 a_0 + b_0 a_1 = 0$

$\Rightarrow b_1 a_0 + a_1/a_0 = 0$

$\Rightarrow b_1 = -a_1/a_0^2 \quad (a_0 \neq 0)$

En general voy encontrando los b_i's, con sólo pedir $a_0 \neq 0$

Obs: $k[[x]]^\times = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n \ , \ a_0 \neq 0 \right\}$

Ej. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$

Obs: 3) $\forall a \in k[[x]]$: $a = x^N \cdot u$, con $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $u \in k[[x]]^\times$.

Además: $k[[x]] / \langle x \rangle \simeq K$, con lo cual $\langle x \rangle$ es maximal, y más aún es el único ideal maximal:

Pues: $K[[x]] \setminus \langle x \rangle = k[[x]]^\times$

Obs. $k[[x]]$ es un anillo local

Más aún: Todo ideal de $k[[x]]$ es de la forma $\langle x^N \rangle$. (En particular: $k[[x]]$ D.I.P)

Def $k((x)) := \mathrm{Frocc}(k[[x]])$

Obs $k((x)) = \left\{ \sum_{n \geq M} a_n x^n,\ a_n \in k,\ M \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\left(\frac{x^{N_1} u_1}{x^{N_2} u_2} = x^{N_1 - N_2} \cdot u_3 \right)$$

Ej: 1) ¿$Y^2 - x \in \mathbb{Q}((x))[Y]$ es irreducible?

Si $Y^2 - x \in \mathbb{Q}[[x]][Y]$ es irreducible, luego (lo es en $\mathbb{Q}((x))[Y]$); y sí, pues x es primo y uso Eisenstein

2) $Y^2 - (x+1) =$ "$(Y - \sqrt{x+1})(Y + \sqrt{x+1})$",

$\sqrt{x+1} := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ (existen a_n's, tomando el desarrollo de Taylor)

3) $Y^2 - e^x = (Y - e^{x/2}) \cdot (Y + e^{x/2})$

con $e^x := \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

Obs. Similarmente se definen $k((x^{1/2})), k((x^{1/3})), \ldots$

$k((x^{\frac{1}{2}})) = \left\{ \sum_{n \geq M} a_n \cdot x^{n/2},\ a_n \in k,\ M \in \mathbb{Z} \right\}$

y $k((x))^\wedge := \left\{ \sum_{n \geq M} a_n x^{\frac{n}{N}},\ a_n \in k,\ M \in \mathbb{Z},\ N \in \mathbb{N} \right\}$

Teo: $\mathbb{C}((x))^\wedge$ es alg cerrado.

Ej: $Y^2 - \operatorname{sen} x \in \mathbb{C}((x))[Y]$,

$$\operatorname{sen} x := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

es irreducible (Eisenstein; de vuelta con el primo x)

Ej: $Y^2 - \operatorname{sen} x \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{2}}))[Y]$ es reducible.

Extensiones Trascendentes

Def E/k: 1) $t \in E$ es trascendente si no es algebraico

$$(\text{si } f \in k[x],\ f(t) = 0 \Rightarrow f = 0)$$

2) $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq E$ son algebraicamente indep'tes si:

$$f \in k[x_1, \ldots, x_n],\ f(t_1, \ldots, t_n) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Obs. $\{t_1\}$ alg indep'te $\Leftrightarrow$ t_1 es trascendente

Ej: $\{x, y\}$ es alg indep'te sobre $\mathbb{Q}$

- $\{x\}$ " " " " $\mathbb{Q}(y)$
- $\{x, x+\sqrt{2}\}$ No es alg indep'te sobre $\mathbb{Q}$

Pues $f = (X-Y)^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X,Y]$,

y $f(x, x+\sqrt{2}) = 0$

Ej: Sea K cuerpo infinito, α algebraico sobre K y t trascendente sobre K. Entonces

$$m_{\alpha,K} = m_{\alpha,K(t)}$$

$$\begin{tikzcd}
 & K(\alpha,t) & \\
K(\alpha) \arrow[ur, dash] \arrow[rr, squiggly] & & K(t) \arrow[ul, dash, "alg"'] \\
 & K \arrow[ul, dash, "alg"] \arrow[ur, dash, "trasc"'] &
\end{tikzcd}$$

Dem: Sean $f = m_{\alpha,K}$, $g = m_{\alpha,K(t)}$

$\Rightarrow g \mid f$.

Si $g = x^n + \frac{b_{n-1}(t)}{c_{n-1}(t)} x^{n-1} + \dots + \frac{b_1(t)}{c_1(t)} x + \frac{b_0(t)}{c_0(t)}$

$c(t) := c_0(t) \cdot c_1(t) \cdot \ldots \cdot c_{n-1}(t) \in K[t]$

$\Rightarrow c(t) \cdot g = c(t) x^n + \tilde{b}_{n-1}(t) x^{n-1} + \dots + \tilde{b}_1(t) x + \tilde{b}_0(t)$

Sea $k \in K$ tq $c(k) \neq 0$, entonces.

(existe, pues ~~k~~ K es infinito)

$$\Rightarrow c(k)\underbrace{g(\alpha)}_{0} = c(k)\alpha^n + \tilde{b}_{n-1}(k)\,\alpha^{n-1} + \cdots + \tilde{b}_1(k)\,\alpha + \tilde{b}_0(k)$$

(*)

Luego, si $h = c(k)x^n + \tilde{b}_{n-1}(k)x^{n-1} + \cdots + \tilde{b}_0(k)$,

$h \in k[x]$ y $h(\alpha) = 0$

$\Longrightarrow f \mid h$, Pero $gr(h) = gr(g)$

$\Longrightarrow \boxed{f = g}$

(*) En general si t es trasc. sobre k

$f(t) = g(t) \Longrightarrow (f-g)(t) = 0$

$\underset{t.\ \text{trasc}}{\Longrightarrow} f - g = 0 \Longrightarrow f(k) = g(k)$,

$\forall k \in K$