Extensiones trascendentes:

Ej. Sea E/K una extensión y sea

$$E_a = \{\alpha \in E : \alpha \text{ algebraico sobre } K\}.$$

Sea B una base de trascendencia de E/K.

1) Probar que B es base de trascendencia de E/E_a

2) ¿$E_a(B) = E$?

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, dash, "\text{alg.}"'] \arrow[ddr, dash, bend left, "\text{alg}"] & \\
 & E_a(B) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
E_a \arrow[dr, dash] & & K(B) \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Veamos que B es alg independ'te sobre E_a.

Sea $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$:

Consideremos:

$$\begin{tikzcd}
 & E_a(b_1,\ldots,b_n) \arrow[dl, dash, "\text{trdeg}=n"'] \arrow[dr, dash, "\text{trdeg}=0"] & \\
E_a \arrow[dr, dash, "\text{trdeg}=0"'] & & K(b_1,\ldots,b_n) \arrow[dl, dash, "\text{trdeg}=n"] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \{b_1, \ldots, b_n\}$ es alg indep'te sobre E_a.

Luego B es alg. indep'te sobre E_a

2) No

Ej

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{t}) = E \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[d, phantom, "\neq"] & \\ E_a = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2},t) \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{Q}(t) \arrow[dl, dash] \\ & \mathbb{Q} = K & \end{tikzcd}$$

$, B = \{t\}$

<u>Teo</u>$^{(*)}$ $K(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = K[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$, entonces $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ son algebraicos sobre K

<u>Def</u>. Sean $A \subseteq B$ anillos conmutativos. $\alpha \in B$ se dice <u>entero</u> sobre A si $\exists\, p \in A[x]$ mónico tq $p(\alpha) = 0$.

<u>Obs</u>. α, β enteros sobre $A \Rightarrow \alpha+\beta$ y $\alpha \cdot \beta$ lo son

<u>Def</u>. $A \subseteq B$, anillos conmut. A se dice íntegramente cerrado en B si:

$b \in B$ entero sobre $A \Rightarrow b \in A$

<u>Prop</u>: Si A es DFU, A es íntegramente cerrado

en Fracc(A)

<u>Dem</u>, Gauss

<u>Obs</u> i) t trascendente sobre $k \Rightarrow k[t]$ es integramente cerrado en $k(t)$

ii) $k[t]$ tiene infinitos primos

iii) A DFU y α algebraico sobre Fracc(A), entonces $\exists\, \beta \in A$ tq $\beta\alpha$ es entero sobre A.

<u>Dem</u>. Digamos. $\alpha^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\alpha^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{b_1}\alpha + \frac{a_0}{b_0} = 0$, con $a_i, b_i \in A$

$$\Rightarrow (\underbrace{b_{n-1} \cdots b_0}_{\beta}\alpha)^n + a_{n-1}\tilde{b}_{n-1}(\beta\alpha)^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + a_1\tilde{b}_1(\beta\alpha) + a_0\tilde{b}_0 = 0$$

$\boxed{\text{m}}$

<u>Dem</u> (de (*)). Inducción

- $n = 1$ ✓
- Paso inductivo ("$n-1 \Rightarrow n$")

$$k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \subseteq k(\alpha_1)[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$$
$$\subseteq k(\alpha_1)(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$
$$\overset{\text{Hipótesis}}{=} k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$$

$\Rightarrow \quad K(\alpha_1)[\alpha_2, \ldots, \alpha_n] = K(\alpha_1)(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

Por HI: $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son alg sobre $K(\alpha_1)$

Entonces bvq α_1 es alg sobre K.

Pues $K(\alpha_1)[\alpha_2 \ldots \alpha_n]$.

$$\begin{array}{c} K(\alpha_1)[\alpha_2 \ldots \alpha_n] \\ |\ \text{alg} \\ K(\alpha_1) \\ |\ \text{alg} \\ K \end{array}$$

Supongamos fuese no, o sea: α_1 es trasc sobre K

Ahora: $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son alg sobre $K(\alpha_1)$, entonces,

por iii) $\exists \beta \in K[\alpha_1]$ tq $\beta\alpha_i$ es entero sobre $K[\alpha_1]$

Pero: $K(\alpha_1) \subseteq K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \overset{\text{Hip}}{=} K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$

Entonces, dado $f \in K(\alpha_1)$, existe $r \in \mathbb{N}$ tq

$\beta^r f$ es entero sobre $K[\alpha_1]$

Sea $p \in K[\alpha_1]$ primo tq $p \nmid \beta$.

(existe, pues por i) hay infinitos primos)

Sea $f = \frac{1}{p} \in K(\alpha_1)$. Entonces $\exists r \in \mathbb{N}$

tq $\underbrace{\beta^r f}_{= \frac{\beta^r}{p}}$ es entero sobre $K[\alpha_1]$, pero entonces. $\beta^r f \in K[\alpha_1]$, pues

$K[\alpha_1]$ es integr. cerrado en $K(\alpha_1)$

Luego $p \mid \beta$: Abs. $\therefore$ α_1 es alg sobre K $\blacksquare$

— x —

Teo. E/K algebraica tq $\forall f \in K[x]$, no constante, f tiene una raíz en E (al menos). Entonces E es alg. cerrado

Probaremos. $\forall f \in K[x]$ no constante, f tiene TODAS sus raíces en E.

Dem. Sea $f = (x-\alpha_1) \dots (x-\alpha_n) \in K[x]$, $\alpha_i \in \overline{K}$

Dados $\sigma \in S_n$ y $g \in K[x_1, \dots, x_n]$

defino $\sigma(q) = q(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n))$.

Dado un tal q; sea:

$$P_q = \prod_{\sigma \in S_n} (x - \sigma(q)).$$

$P_q \in K[x]$, pues sus coeff's son simétricos en $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Entonces, por hipótesis, P_q tiene al menos una raíz en E

O sea, $\exists\, \tau \in S_n$ tq $\tau(q) \in E$

Vimos entonces que: $\forall q \in K[x_1, \dots, x_n]$, $\exists\, \tau$ tq $\tau(q) \in E$

Llamemos $V_\sigma = \{ q \in K[x_1, \dots, x_n] : \sigma(q) \in E \}$

Tenemos entonces que: $K[x_1, \dots, x_n] = \bigcup_{\sigma \in S_n} V_\sigma$

Pero cada V_σ es un subespacio vectorial de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Luego: $\exists\, \eta \in S_n$ tq

$$V_\eta = K[x_1, \ldots, x_n]$$

Tomo entonces x_1 ; resulta que $x_1 \in V_\eta$

$$\Rightarrow \eta(x_1) \in E$$

$$\Rightarrow x_1(\eta(\alpha_1), \ldots, \eta(\alpha_n)) \in E$$

$$\Rightarrow \underbrace{\eta(\alpha_1)}_{= \alpha_{i_1}} \in E.$$

Tomando $x_2, \ldots, x_n$, concluyo: $\alpha_i \in E$, $\forall i$.

$\blacksquare$