

Algebra III

Práctica 8 - Extensiones trascendentes

2do cuatrimestre 2020

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $t, t', \alpha \in E$. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando las respuestas:

1. Si t y t' son trascendentes sobre K , entonces tt' y $t + t'$ no son ambos algebraicos sobre K .
2. Si t es trascendente sobre K y α es algebraico sobre K , entonces $t + \alpha$ es trascendente sobre K .
3. Si t es trascendente sobre K y α es algebraico sobre K , entonces αt es trascendente sobre K .
4. Si t y t' son trascendentes sobre K , entonces el conjunto $\{t, t'\}$ es algebraicamente independiente sobre K .

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo y sean α algebraico sobre K y t trascendente sobre K . Probar que $f(\alpha, K) = f(\alpha, K(t))$ y que $[K[\alpha] : K] = [K(t)[\alpha] : K(t)]$.

Ejercicio 3. Sea $E = \mathbb{C}(X)[Y]/\langle f(X, Y) \rangle$ con $f(X, Y) = Y^2 - (X - a)(X - b)(X - c)$, para $a, b, c \in \mathbb{C}$. Probar que tanto $\{X\}$ e $\{Y\}$ son bases de trascendencia de E/\mathbb{C} .

Ejercicio 4. Sean L_1 y L_2 dos subextensiones de E/K . Probar que:

$$\text{trdeg}(L_1 L_2 / K) \leq \text{trdeg}(L_1 / K) + \text{trdeg}(L_2 / K).$$

Dar un ejemplo donde no valga la igualdad.

Ejercicio 5. Sea E un cuerpo algebraicamente cerrado y sea K un subcuerpo. Sea $\varphi : E \rightarrow E$ un K -endomorfismo. Probar que si $\text{trdeg}(E/K) < \infty$ entonces φ es un automorfismo. Mostrar que esto no tiene por qué valer si $\text{trdeg}(E/K) = \infty$.

Ejercicio 6. Sea t trascendente sobre \mathbb{C} y sea K la clausura algebraica de $\mathbb{C}(t)$. Probar que $K \simeq \mathbb{C}$.

Ejercicio 7. ¿Cuál es el cardinal de una base de trascendencia de \mathbb{C}/\mathbb{Q} ?

Ejercicio 8. Probar que \mathbb{C} tiene infinitos automorfismos de cuerpo. ¿Cuál es el cardinal del conjunto de automorfismos de \mathbb{C} ?

Ejercicio 9. Probar que \mathbb{C} tiene infinitos subcuerpos propios que son isomorfos a él.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo y E una K -álgebra finitamente generada. Probar que si E es un cuerpo entonces E/K es una extensión algebraica.