Algebra III

Práctica 7 - Extensiones algebraicas, norma y traza

2do cuatrimestre 2020

En esta práctica t, u y v son variables.

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$, y sean $a \in K - K^p$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que $X^{p^n} - a$ es irreducible en $K[X]$.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $f(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \text{mín}\{j \in \mathbb{N}_0 \ : \ \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 3. Sea K un cuerpo de característica $p > 2$ y sea $f = X^{2p} + uvX^p + v \in K(u,v)[X]$. Sea $\alpha \in \overline{K(u,v)}$ una raíz de f. Probar que:

1. $[K(u,v)[\alpha] : K(u,v)] = 2p$.
2. $K(u,v)[\alpha]/K(u,v)$ no es separable ni puramente inseparable.

¿Qué pasa para característica $p = 2$?

Ejercicio 4. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:

1. $\mathbb{F}_p(u,v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.
2. $\mathbb{F}_p(u,v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

Ejercicio 5. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Probar que $[K[\alpha] : K]_i = p^m$ donde $m = \text{máx}\{k \in \mathbb{N}_0 \ : \ p^k | r\}$.

Ejercicio 6. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $p \neq 2$ y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de $X^{p^3} - tX^p + t \in K[X]$. Sea E la clausura normal de $K(\alpha)/K$. Determinar $[E : K]$.

Ejercicio 7. Sea K un cuerpo de característica p, eventualmente 0. Se recuerda que $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)\}$ y que se dice que K es perfecto cuando $K^{p^{-\infty}} = K$. Probar que:

1. Si K no es perfecto, entonces $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$.
2. $K^{p^{-\infty}}$ es perfecto y $\overline{K}/K^{p^{-\infty}}$ es separable.
3. K es perfecto si y solo si toda extensión algebraica de K es separable.
4. Si K es un cuerpo de característica $p > 0$, entonces $K(t)$ no es perfecto.

Ejercicio 8. Sea K un cuerpo y E/K una extensión algebraica.

1. Probar que si K es perfecto, entonces E es perfecto.
2. Probar que si E es perfecto y E/K es separable, entonces K es perfecto.
3. Probar que si E/K es finita y E es perfecto, entonces E/K es separable.

Ejercicio 9.

1. Calcular la norma y la traza de $\sqrt[3]{2}$ en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$.

2. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular la norma y la traza de ξ_p en $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$.
3. Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados y sea $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] - \mathbb{Q}$. Probar que $f(\alpha, \mathbb{Q}) = X^2 - \mathrm{Tr}(\alpha)X + \mathrm{N}(\alpha)$.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Calcular la norma y la traza de t en $K(t)/K(t^p)$.

Ejercicio 11. Sea $p > 3$ un primo. Sean $E = \mathbb{F}_p(u, v)$ y $K = \mathbb{F}_p(u^3, v^2)$. Calcular $\mathrm{N}_{E/K}(u + v)$y $\mathrm{Tr}_{E/K}(u + v)$.

Ejercicio 12. Sea E/K una extensión finita. Probar que:

1. Si E/K es separable, entonces $\mathrm{Tr}_{E/K} : E \to K$ es suryectiva.
2. La aplicación $\mathrm{Tr} : E \times E \to K$ dada por $\mathrm{Tr}(a, b) = \mathrm{Tr}_{E/K}(ab)$ es una forma bilineal simétrica.
3. Para cada $a \in E$ se define $\mathrm{Tr}_a : E \to K$ mediante $\mathrm{Tr}_a(b) = \mathrm{Tr}_{E/K}(ab)$.
   a) Verificar que $\mathrm{Tr}_a \in E^*$ para todo $a \in E$.
   b) Probar que si E/K es separable, entonces la aplicación $a \mapsto \mathrm{Tr}_a$ es un isomorfismo de E en E^*.

Ejercicio 13. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ primos distintos. Sea K un cuerpo de característica p y sea E/K una extensión de grado $[E : K] = q$. Probar que existe $\alpha \in E$ tal que $E = K[\alpha]$ y el coeficiente de grado $q - 1$ en $f(\alpha, K)$ es nulo.

Ejercicio 14.

1. Calcular el núcleo y la imagen del morfismo de grupos multiplicativos $\mathrm{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times$.
2. Probar que en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ la norma no es inyectiva ni suryectiva.

Ejercicio 15. Sea K un cuerpo finito y sea E/K una extensión finita. Probar que $\mathrm{N}_{E/K}$ y $\mathrm{Tr}_{E/K}$ son suryectivas.

Ejercicio 16. Sea K un cuerpo de característica p y sea E/K una extensión de grado n, con $p \nmid n$. Sea $\alpha \in E$. Probar que si $\mathrm{Tr}_{E/K}(\alpha^i) = 0$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces $\alpha = 0$.

Ejercicio 17. Sean $r, n \in \mathbb{N}$. Sean $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[r]{p_1}, \ldots, \sqrt[r]{p_n}]/\mathbb{Q}$ es de grado r^n y que $\sqrt[r]{p_1} + \ldots + \sqrt[r]{p_n}$ es un elemento primitivo.

Ejercicio 18. Sea $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ una extensión de grado n, y sea $f := f(\alpha, \mathbb{Q}) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \in \mathbb{Q}[X]$, con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Se recuerda que el discriminante de f está definido como $\Delta(f) = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$. Probar que $\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{N}_{\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}}(f'(\alpha))$, donde f' es el polinomio derivado de f.