Algebra III

Práctica 3 - Extensiones normales y extensiones separables

2do cuatrimestre 2020

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.
2. El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.
3. Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.
4. Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición un polinomio $f \in K[X]$, entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados.

1. $X^p - a$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.
2. $X^3 - 10$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
3. $X^4 - 5$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.
4. $X^4 + 2$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[i]$.
5. $\prod_{i=1}^{n}(X^2 - p_i)$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.
6. $X^3 - 2$, sobre $\mathbb{F}_7$.
7. $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{F}_5$.
8. $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.
9. $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. (Fácil, pero muy útil) Sea $E = K[a]/K$ una extensión normal. Sea $b \in \overline{K}$ una raíz de $f(a, K)$. Probar que $b \in E$ y que $E = K[b]$.

Ejercicio 4. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $X^3 + 2X + 1$ y $X^3 + X^2 + X + 2$ sobre $\mathbb{F}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{F}_3$.

Ejercicio 5. Calcular los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_5$. ¿Son isomorfos entre ellos?

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión que es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$, con $\mathrm{gr}(f) = n$. Probar que $[E : K] \mid n!$. Mostrar ejemplos donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.

Ejercicio 7. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Toda extensión finita es normal.
2. Toda extensión finita está contenida en una extensión finita normal.
3. Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.

4. Todo K-morfismo $f : L/K \to L/K$ es un K-automorfismo.
5. Si L/K es algebraica, entonces todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.
6. Toda extensión con grupo de Galois trivial es normal.
7. El grupo de Galois de una extensión normal es cíclico.

Ejercicio 8. Sea E/K una extensión normal y sea $K \subseteq F \subseteq E$ una subextensión. Probar que todo K-morfismo de F en E puede ser extendido a un K-automorfismo de E.

Ejercicio 9. Determinar cuales de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso, calcular $\mathrm{Gal}(E/K)$ y $\{\sigma : E \to \overline{K},\ K-\text{morfismo}\}$.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]/\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]$.
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$.
4. $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.
5. $\mathbb{F}_3[a]/\mathbb{F}_3$, con a raíz de $X^3 + 2X + 1$.

Ejercicio 10. Para cada uno de los polinomios del ejercicio 2 calcular $\mathrm{Gal}(E/K)$, donde E es su cuerpo de descomposición sobre el cuerpo K dado.

Ejercicio 11. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 12.

1. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}\,]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]/\mathbb{Q}$ son normales, pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}\,]/\mathbb{Q}$ no lo es.
   Calcular $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}\,]/\mathbb{Q})$.
2. Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

Ejercicio 13. Sea H/K una extensión algebraica y sean E/K y F/K subextensiones normales. Probar que EF/K y $E \cap F/K$ son normales.

Ejercicio 14. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ vale que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

Ejercicio 15. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_7$.

Ejercicio 16.

1. Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.
2. Sea K un cuerpo infinito y sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ tiene una raíz en E. Probar que E es algebraicamente cerrado. (Nota: Vale también si K es finito.)

Ejercicio 17. Sea E/K una extensión finita y separable. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $\{\sigma : E \to \overline{K},\ K-\text{morfismo}\}$ tiene $[E : K]$ elementos.
2. Si $a \in E$ satisface $\sigma_1(a) \neq \sigma_2(a)$ para todo $\sigma_1 \neq \sigma_2$ K-morfismos, entonces $E = K[a]$.
3. Si $b \in E$, entonces
$$\prod_{\sigma:E\to\overline{K},K-\text{morfismo}} (X - \sigma(b)) = f(b, K)^{[E:K[b]]}.$$
4. Existe $\theta \in E$ tal que $E = K[\theta]$.

Ejercicio 18. (Lema de Carlos) Sean $f, g, h \in K[X]$ con f irreducible separable, y $h(X) \mid f(g(X))$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$ las raices de f y sean $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \overline{K}$ las raices de h. Probar que los conjuntos $A_j = \{1 \leqslant i \leqslant m\ :\ g(\beta_i) = \alpha_j\}$ tienen todos la misma cantidad de elementos.

Ejercicio 19. Determinar elementos primitivos de $E/\mathbb{Q}$ donde E es el cuerpo de descomposición del polinomio

1. $X^3 - 2$
2. $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$
3. $X^4 - 2$
4. $(X^4 + 1)(X^2 + 5)$

Ejercicio 20. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea $f \in K[X]$ un polinomio irreducible de grado n con $p \nmid n$. Probar que el polinomio f es separable.

Ejercicio 21. Probar que el polinomio $X^n - 1 \in K[X]$ no es separable si y solo si $\mathrm{car}(K) = p$ y $p \mid n$.

Ejercicio 22. Sea K es un cuerpo de característica $p > 0$, Probar que

1. la aplicación $x \mapsto x^p$ es un $\mathbb{F}_p$-endomorfismo de K (se llama *endomorfismo de Frobenius*).
2. la aplicación $x \mapsto x^{p^e}$ es un $\mathbb{F}_p$-endomorfismo de K, $\forall\, e \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 23. Probar que las condiciones siguientes sobre un cuerpo K son equivalentes:

1. Todo polinomio irreducible en $K[X]$ tiene raíces distintas (o sea es separable)
2. Toda extensión finita de K es separable.
3. Si $\mathrm{car}(K) = p$ ($p = 0$ o $p > 0$), el conjunto $K^{p^{-\infty}} := \{x \in \overline{K} : \sigma(x) = x,\ \forall\, \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$ coincide con K.
4. O bien $\mathrm{car}(K) = 0$ o si $\mathrm{car}(K) = p > 0$, cada elemento de K es potencia p-ésima de un elemento de K.
5. O bien $\mathrm{car}(K) = 0$ o si $\mathrm{car}(K) = p > 0$, el endomorfismo de Frobenius de K es un automorfismo de K.

En cualquiera de estos casos se dice que el cuerpo K es *perfecto*.

Ejercicio 24. Probar que todo cuerpo finito es perfecto.