Algebra III

Práctica 2 - Extensiones de cuerpos, Polinomios minimales

2do cuatrimestre 2020

Nota: El polinomio minimal del elemento x sobre el cuerpo K se nota aquí $f(x,K)$, y ξ_n nota una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión, y sea $x \in E$ algebraico sobre K. Dada una subextensión F/K de E/K, probar que $f(x,F)$ divide a $f(x,K)$. Dar ejemplos con $f(x,F) = f(x,K)$ y con $f(x,F) \neq f(x,K)$.

Ejercicio 2. Calcular los siguientes polinomios minimales:

1. $f(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q})$
2. $f(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$
3. $f(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$
4. $f(i,\mathbb{Q})$
5. $f(i,\mathbb{Q}[i])$
6. $f(w,\mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C}$

Ejercicio 3. Calcular:

1. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i] : \mathbb{Q}]$
2. $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$
3. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2-\sqrt{3}}] : \mathbb{Q}]$

Ejercicio 4.

1. Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$ y $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$. Deducir que $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.
2. Hallar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2},\sqrt{3}]$.

Ejercicio 5. Sea K un cuerpo y sea $E = K[a]$ una extensión finita de K. Para cada $\alpha \in E$ definimos $L_\alpha : E \to E$ la K-transformación lineal dada por $L_\alpha(x) = \alpha\, x$.

1. Probar que $f(a,K) = \chi_{L_a} = \det(xI - L_a)$.
2. ¿Para cuáles $\alpha \in E$ vale que $f(\alpha,K) = \chi_{L_\alpha}$?

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión. Probar que E/K es algebraica si y sólo si todo anillo A, con $K \subseteq A \subseteq E$, es un cuerpo.

Ejercicio 7. Sea $a \in \mathbb{Z}[i]$ irreducible y sea K el cuerpo primo de $\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle$. Calcular $[\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle : K]$.

Ejercicio 8. Probar que si E/K es una extensión finita tal que $[E : K]$ es primo, entonces no hay cuerpos intermedios entre E y K.

Ejercicio 9. Sea E/K una extensión algebraica y sea $a \in E$ tal que $[K[a] : K]$ es impar. Probar que $K[a] = K[a^2]$. Mostrar que eso no vale en general si $[K[a] : K]$ es par.

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ coprimo con 6 y sea $F/\mathbb{Q}$ una extensión finita de grado n. Probar que $[F[\sqrt[3]{2},i] : F] = 6$.

Ejercicio 11. Sea E/K una extensión finita y sean L_1 y L_2 subextensiones. Probar que:

1. Si $[L_1 : K]$ y $[L_2 : K]$ son coprimos, entonces $[L_1L_2 : K] = [L_1 : K][L_2 : K]$.
2. Si $[L_1L_2 : K] = [L_1 : K][L_2 : K]$ entonces $L_1 \cap L_2 = K$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 12. Mostrar que el polinomio $X^5 + 6X^3 + 15X^2 + 3$ es irreducible en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}][X]$.

Ejercicio 13.

1. Sea K un cuerpo con $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Sea E/K un extensión de grado 2. Probar que existe $a \in E$ tal que $E = K[a]$ y $a^2 \in K$.
2. Sea $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ y sea a una raíz de f en una clausura algebraica de $\mathbb{Z}_2$. Probar que no existe $b \in \mathbb{Z}_2[a]$ tal que $f(b, \mathbb{Z}_2) = X^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 14. Dado $c \in \mathbb{Q}$, sea α_c una raíz del polinomio $X^2 + cX + c^2$. Describir las posibles extensiones $\mathbb{Q}[\alpha_c]$ de $\mathbb{Q}$ y determinar $[\mathbb{Q}[\alpha_c] : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 15.

1. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular $f(\xi_p, \mathbb{Q})$ y deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p] : \mathbb{Q}]$.
2. Calcular $f(\xi_6, \mathbb{Q})$.

Ejercicio 16.

1. Probar que $f(\xi_5 + \xi_5^4, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$.
2. Deducir que $\mathbb{Q}[\xi_5]$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.
3. Calcular $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

Ejercicio 17. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.

1. Probar que $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.
2. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el menor cuerpo que contiene a todas las raices de $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$.

Ejercicio 18. Sean $K = \mathbb{C}((X))$ y $L = \mathbb{C}((X^{1/2}))$. Probar que:

1. Si $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ entonces existe $v \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ tal que $u = v^2$.
2. Si $f \in K[Y]$ es de grado 2, entonces f tiene sus raíces en L.

Ejercicio 19. Sea $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C} \ : \ x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Probar que $\overline{\mathbb{Q}}$ es un cuerpo que es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ que no es finita, y que es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 20. Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio $f \in K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo. Sea $A = K[X_f \ : \ f \in K[X] \text{ irreducible}]$. Sea $I \subseteq A$ el ideal generado por $\{f(X_f) \ : \ f \in K[X] \text{ irreducible}\}$. Sea $\mathcal{M}$ un ideal maximal de A que contiene a I y sea $L = A/\mathcal{M}$. Sea $E = \{x \in L \ : \ x \text{ es algebraico sobre } K\}$. Probar que E es un cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a K y que E/K es algebraica.

Ejercicio 22. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}]$.

1. Probar que $[E : \mathbb{Q}] = 2^n$.
2. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Calcular el grado de $\lambda_1\sqrt{p_1} + \lambda_2\sqrt{p_2} + \cdots + \lambda_n\sqrt{p_n}$ sobre $\mathbb{Q}$.

3. Caracterizar las subextensiones de $E/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 23. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de E/K de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si E/K es puramente trascendente?

Ejercicio 24.

1. Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.
2. Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K.
3. Deducir que para todo cardinal infinito a existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal a.

Ejercicio 25. Sea K un cuerpo.

1. Sea t trascendente sobre K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $f\,(t, K(t^n))$. Deducir $[K(t) : K(t^n)]$.
2. Sea $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ números naturales. Calcular $[K\,(t_1, \ldots, t_n\,) : K\,(t_1^{e_1}, \ldots, t_n^{e_n}\,)\,]$.

Ejercicio 26. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X] - K$. Probar que $[K(X) : K(f)] = \mathrm{gr}(f)$.

Ejercicio 27. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x + y$ o $x.\,y$ es trascendente sobre K.
2. Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x + y$ es trascendente sobre K.
3. Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x.\,y$ es trascendente sobre K.
4. Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{\,x, y\,\}$ es algebraicamente independiente sobre K.
5. Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{\,x, y\,\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

Ejercicio 28.

1. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] \to \mathbb{C}$ y que en cada caso $f\big(\,\mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]\,\big) \subseteq \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]$ (de hecho, vale la igualdad).
2. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.
   a) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big] \to \mathbb{C}$ pero, en general, $f\big(\,\mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big]\,\big) \not\subseteq \mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big]$.
   b) Considerar $\mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d},\, \xi_3\big]$. ¿Qué sucede en este caso?