Álgebra III - 2do C. 2020 - Clase 23 - 24/11/2020

14.4 Números trascendentes

- J.H. Lambert, 1770: π (1/2 perímetro de círculo de radio 1) es irracional. Más trabajos de C. Hermite luego, otra prueba, 1822-1901.
- J. Liouville, 1844, construye por primera vez números trascendentes.
- C. Hermite, 1873: e es trascendente.
- G. Cantor, 1874: trascendentes son no numerables, sin construir ninguno.
- F. von Lindemann, 1882: π es trascendente.

Teorema 14.4.1 (Teorema de Liouville, 1844)
Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ *con* $\mathrm{gr}(\alpha) = d > 1$ *(donde* $\mathrm{gr}(\alpha) := \mathrm{gr}(f(\alpha, \mathbb{Q}))$ *). Entonces*

$$\exists\, c := c(\alpha) > 0 \quad \textit{tal que para todo} \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad \textit{con} \quad q > 0, \quad \textit{se tiene} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^d}.$$

(Los números algebraicos no racionales no se pueden aproximar "demasiado bien"por números racionales.)

Prueba.–
Para todo p/q tq $\left|\alpha - p/q\right| > 1$, sirve $c(\alpha) = 1$ pues $1 \geq 1/q^d$.
Me restrinjo entonces a analizar los p/q tq $\left|\alpha - p/q\right| \leq 1$.
Sea $f := a\, f(\alpha, \mathbb{Q})$ en $\mathbb{Z}[X]$ *primitivo*, de grado d.

$$\begin{aligned} & f = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \\ & \implies \quad f\Big(\frac{p}{q}\Big) = a_d \Big(\frac{p}{q}\Big)^d + a_{d-1} \Big(\frac{p}{q}\Big)^{d-1} + \cdots + a_1 \Big(\frac{p}{q}\Big) + a_0 \neq 0 \end{aligned}$$

pues f irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.
Ahora, *por el brillante argumento que todo número entero* $\neq 0$ *tiene módulo* ≥ 1,

$$q^d f\Big(\frac{p}{q}\Big) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \implies \quad \left|q^d f\Big(\frac{p}{q}\Big)\right| \geq 1 \quad \implies \quad \left|f\Big(\frac{p}{q}\Big)\right| \geq \frac{1}{q^d}. \tag{1}$$

Por otro lado desarrollemos f en Taylor alrededor de α:

$$
\begin{aligned}
f(X) = \underbrace{f(\alpha)}_{0} + f'(\alpha)(X-\alpha) + \frac{f''(\alpha}{2}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(d)}(\alpha)}{d!}(X-\alpha)^d \\
\Rightarrow \ \Big|f\big(\frac{p}{q}\big)\Big| \leq |f'(\alpha)|\,\big|\alpha - \frac{p}{q}\big| + \frac{|f''(\alpha)|}{2}\,\big|\alpha-\frac{p}{q}\big|^2 + \cdots + \frac{|f^{(d)}(\alpha)|}{d!}\,\big|\alpha - \frac{p}{q}\big|^d \\
\leq \ \big|\alpha - \frac{p}{q}\big|\Big(|f'(\alpha)| + \cdots + \frac{|f^{(d)}(\alpha)|}{d!}\Big) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

pues $\big|\alpha - \frac{p}{q}\big| \leq 1 \ \Rightarrow \ \big|\alpha - \frac{p}{q}\big|^k \leq \big|\alpha - \frac{p}{q}\big|$.

Definamos entonces $c'(\alpha) := |f'(\alpha)| + \cdots + \dfrac{|f^{(d)}(\alpha)|}{d!}$ que es > 0.

Entonces, por (1) y (2),

$$\frac{1}{q^d} \ \leq \ \Big|f\big(\frac{p}{q}\big)\Big| \ \leq \ \big|\alpha - \frac{p}{q}\big|\, c'(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \big|\alpha - \frac{p}{q}\big| \geq \frac{1}{c'(\alpha)q^d}.$$

Termino eligiendo $c := c(\alpha)$ con $0 < c(\alpha) < \dfrac{1}{c'(\alpha)}$ y $c(\alpha) < 1$.

Entonces, $\forall\, p/q$ se tiene $\big|\alpha - \frac{p}{q}\big| > \dfrac{c}{q^d}$.

■

Corolario 14.4.2 (Construcción de números trascendentes)
Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si para todo $c > 0$ y para todo $d > 1$, existe $p/q \in \mathbb{Q}$ tal que $\big|\alpha - \frac{p}{q}\big| \leq \dfrac{c}{q^d}$, entonces α es trascendente.

Definición-Proposición 14.4.3 (Números de Liouville)
Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si existen $\{p_n, q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $q_n > 1$ y $\operatorname{mcd}(p_n, q_n) = 1$, $\forall\, n$, que satisfacen que para todo n, $\big|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\big| \leq \dfrac{1}{q_n^n}$, entonces α es trascendente.

Prueba.–
Esto es pues dado $c > 0$, existe d_0 tal que para todo $q_n (\geq 2)$, $\dfrac{1}{q_n^{d_0}} \leq \dfrac{1}{2^{d_0}} \leq c$.

Para $d > 1$, sea entonces $n \in \mathbb{N}$ tq $n - d_0 \geq d$. Luego

$$\big|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\big| \ \leq \ \frac{1}{q_n^n} = \frac{1}{q_n^{d_0}} \cdot \frac{1}{q_n^{n-d_0}} \ \leq \ \frac{c}{q_n^{n-d_0}} \ \leq \ \frac{c}{q_n^d}.$$

■

Ejemplo (El típico ejemplo de número de Liouville)

Sea $\alpha = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^{k!}} = \big(0,110001000\cdots 001\cdots\big)_2$.

Se tiene $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ pues su desarrollo binario no es periódico.

Defino para cada n

$$q_n := 2^{n!} \geq 2 \quad \text{y} \quad p_n := 2^{n!}\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^{k!}} \quad \text{de modo que} \quad \frac{p_n}{q_n} = \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^{k!}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \big|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\big| &= \sum_{k\geq n+1}\frac{1}{2^{k!}} \leq \frac{1}{2^{(n+1)!}}\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{2^{k!-(n+1)!}} \\ &\leq \frac{1}{2^{(n+1)!}}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k} \leq \frac{2}{2^{(n+1)!}} = \frac{2}{q_n^{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto α es un número de Liouville, y es trascendente.

■

Comentarios

- Los nros de Liouville son no numerables y densos en $\mathbb{R}$ pero tienen medida 0.
- e no es un número de Liouville (Perron, 1929)
- π no es un número de Liouville (Mahler, 1932)

Extensiones del teorema de Liouville

El teorema de Liouville implica que para $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R}$ con $\mathrm{gr}(\alpha) =: d > 1$,
la ecuación $\big|\alpha - \frac{p}{q}\big| < \frac{1}{q^N}$ tiene solo finitas soluciones $p/q \in \mathbb{Q}$ para $N > d$:
Pues para $c(\alpha)$ del teor. de Liouville, como $N > d$, para q suficientemente grande

$$q^{N-d} > \frac{1}{c(\alpha)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{c(\alpha)}{q^d} > \frac{1}{q^N} \quad \Longrightarrow \quad \big|\alpha - \frac{p}{q}\big| > \frac{1}{q^N}.$$

Y para cada q fijado de los finitos valores que quedan, hay solo finitos valores de p que sirven, pues para un p que sirve, los demás pertenecen a $\{p-q+1,\dots,p+q-1\}$:
Para $q=1$ es trivial y para $q\geq 2$ y $k\geq q$,

$$\big|\alpha - \frac{p\pm k}{q}\big| = \big|\alpha - \frac{p}{q} \pm \frac{k}{q}\big| \geq \frac{k}{q} - \big|\alpha - \frac{p}{q}\big| \geq 1 - \frac{1}{q^N} > \frac{1}{q^N}.$$

Pregunta $N > d$ se puede reescribir como $N = d + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ cualquiera. ¿Es $d + \varepsilon$ óptimo tal que la ecuación

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{d+\epsilon}}$$

tenga solo finitas soluciones?

Se sabe por *fracciones continuas* que los convergentes $\{p_n, q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Por lo tanto $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ tiene ∞ soluciones.

O sea, se sabe que para $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ de grado $d \geq 2$,

- $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{d+\varepsilon}}$ tiene solo finitas soluciones racionales p/q.
- $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ tiene infinitas soluciones racionales p/q.

(Notar que $\frac{1}{q^d} < \frac{1}{q^2}$). ¿Cuál será entonces el valor optimal?

Teorema de Thue-Siegel-Roth, 1955

(Alex Thue, 1909, Carl Siegel, 1921, Klaus Roth, 1955)

Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ no racional. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, la ecuación

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

tiene solo finitas soluciones racionales p/q.

Teoría trascendente de números: estado del arte

Teorema de Hermite-Lindemann, 1882

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times$. Entonces α y e^α no son simultáneamente algebraicos.

- $\alpha = 1 \quad \rightsquigarrow \quad e$
- $\alpha = i\,\pi \quad \rightsquigarrow \quad e^{i\pi} = -1$
- $\alpha = \sqrt{2} \quad \rightsquigarrow \quad e^{\sqrt{2}}$
- $\alpha = \ln 2 \quad \rightsquigarrow \quad e^{\ln 2} = 2$

7mo Problema de Hilbert: *(Sobre la trascendencia de a^b)*

¿Es a^b trascendente, siendo $a \neq 0, 1$ algebraico y b irracional algebraico?

Teorema de Gelfond-Schneider *(probado indep. por ambos en 1934)*

Sean $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}, a \neq 0, 1$ y $b \notin \mathbb{Q}$.
Entonces $a^b := e^{b \log a}$ es trascendente.
(Aquí $\log a$ es cualquier determinación del logaritmo de a)

- $a = 2,\ b = \sqrt{2} \quad \rightsquigarrow \quad 2^{\sqrt{2}}$
- *Para* $a = -1$, *tomamos* $\log a = \pi\, i,\ b = \dfrac{1}{i} \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q} \quad \rightsquigarrow \quad a^b = e^{\pi}$.

Formulación equivalente:

Sean $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ y $\log \alpha \neq 0, \log \beta$ determinaciones arbitrarias del logaritmo. Entonces

$$\frac{\log \beta}{\log \alpha} \notin \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log \beta}{\log \alpha} \notin \overline{\mathbb{Q}}.$$

Gelfond, 1949:

Al menos uno entre $e^e,\ e^{e^2},\ e^{e^3}$ es trascendente.

Teorema de las 6 exponenciales, Siegel-Lang/Ramachandra, 1967

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-li y $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-li.
Entonces alguno de los 6 números $e^{\alpha_i \beta_j},\ 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2$, es trascendente.

Conjetura de las 4 exponenciales, $\sim$ 1940, $\sim$ 1960:

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-li y $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-li.
Entonces alguno de los 4 números $e^{\alpha_i \beta_j},\ 1 \leq i, j \leq 2$, es trascendente.

Sobre independencia algebraica

Teorema de Lindemann-Weirstrass, 1882-1885

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \mathbb{Q} - \text{li} \quad \Longrightarrow \quad e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_d} \ \text{alg.ind./}\mathbb{Q}.$$

Ejemplo: $\quad e\,,\ e^{\sqrt{2}}$

Gelfond, 1949

- $2^{\sqrt[3]{2}}, 2^{\sqrt[3]{4}}$ son alg.ind./$\mathbb{Q}$.
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-li y $\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-li, con $d\ell \geq 2d + \ell$ implica

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\{\alpha_i, e^{\alpha_i \beta_j}\,,\, 1 \leq i \leq d,\, 1 \leq j \leq \ell\}) \geq 2.$$

  - Casos interesantes: $d = \ell = 3$ y $d = 2,\ \ell = 4$.
  - $a \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1\}$, $b \in \overline{\mathbb{Q}}$ con $\mathrm{gr}(b) \geq 3$, entonces

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}\big(\mathbb{Q}(a^b, a^{b^2}, a^{b^3}, a^{b^4})\big) \geq 2,$$

    tomando

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = b,\ \alpha_3 = b^2 \ \text{ y } \ \beta_1 = \log a,\ \beta_2 = b \log a,\ \beta_3 = b^2 \log a.$$

  - $a \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1\}$, $b \in \overline{\mathbb{Q}}$ con $\mathrm{gr}(b) = 3$, entonces

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}\big(\mathbb{Q}(a^b, a^{b^2})\big) = 2,$$

    pues a^{b^3} y a^{b^4} alg./$\mathbb{Q}(a^b, a^{b^2})$:

$$b^3 = a_2 b^2 + a_1 b + a_0 \ \Rightarrow\ a^{b^3} = a^{a_2 b^2 + a_1 b + a_0} = a^{a_0}(a^b)^{a_1}(a^{b_2})^{a_2} \ \text{ alg./}\mathbb{Q}(a^b, a^{b^2}).$$

Conjetura de Gelfond, 1948

Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1\}$ y $1, \beta_1, \ldots, \beta_d \in \overline{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{Q}$-li. Entonces

$$\alpha^{\beta_1}, \cdots, \alpha^{\beta_d} \quad \text{alg.ind./}\mathbb{Q}.$$

Implica que para $b \in \overline{\mathbb{Q}}$ con $\mathrm{gr}(b) = d$, entonces

$$a^b, a^{b^2}, \ldots, a^{b^{d-1}} \quad \text{son alg.ind./}\mathbb{Q}.$$

Se sabe para $d = 2$ y $d = 3$.

Teorema de Nesterenko-Philippon-Diaz, 1990

$\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-li y $\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$-li implica

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\{\alpha_i, e^{\alpha_i \beta_j}\,,\, 1 \leq i \leq d,\, 1 \leq j \leq \ell\}) \geq \left[\frac{d\ell + d}{d + \ell}\right].$$

Conjetura e y π son alg.ind./$\mathbb{Q}$.

Brownawell-Waldschmidt, 1986

O bien e y π son alg.ind./$\mathbb{Q}$ o bien e^{π^2} es trascendente.

Nesterenko, 1996 π y e^{π} son alg.ind./$\mathbb{Q}$.

Y ahora la reina de las conjeturas en teoría trascendente de números:

Conjetura de Schanuel, 1960

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C} \quad \mathbb{Q}\text{-li} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}}\bigl(\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_d})\bigr) \geq d.$$

La conjetura de Schanuel implica

- El teorema de Lindemann-Weierstrass.
- La conjetura de Gelfond:
  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}, \alpha_0 = \log \alpha, \alpha_1 = \beta_1 \log \alpha, \ldots, \alpha_d = \beta_d \log \alpha$ implica
  $$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\underbrace{\log \alpha, \beta_1 \log \alpha, \ldots, \beta_d \log \alpha}_{\text{trdeg} \leq 1}, \underbrace{\alpha}_{\in \overline{\mathbb{Q}}}, \underbrace{\alpha^{\beta_1}, \ldots, \alpha^{\beta_d}}_{\text{trdeg} \geq d}) \geq d+1.$$
- e y π son alg.ind./$\mathbb{Q}$: $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2\pi i \quad \rightsquigarrow \quad 1, 2\pi i, e, e^{2\pi i} = 1$.
- La conjetura de las 4 exponenciales.
- Y todas las demás...