

# ANÁLISIS NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2019

## Práctica N° 6: Elementos Finitos.

**Ejercicio 1** Probar que las normas

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \quad \text{y} \quad \|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

son equivalentes. Verificar que la norma de  $H^1$  se deriva de un producto escalar.

**Ejercicio 2** Considerar el problema: encontrar  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un abierto acotado, tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con  $f$  una función prefijada en  $C(\overline{\Omega})$ .

- i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
- ii) ¿Cómo definiría una solución débil?
- iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iv) Probar que existe una solución única en  $H_0^1(\Omega)$  de la formulación débil.

**Ejercicio 3** Considerar el problema: encontrar  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un abierto acotado de clase  $C^1$ , tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con  $f$  una función prefijada en  $C(\overline{\Omega})$ .

- i) Defina solución clásica y débil para este problema.
- ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iii) Probar que existe una solución única en  $H^1(\Omega)$  de la formulación débil.

**Ejercicio 4** a) Sea  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , probar que existe una constante  $C_0$  tal que, para toda  $u \in H^1(\Omega)$  :

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

b) Considerar el problema: encontrar  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

con  $f \in C(\bar{\Omega})$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$  y  $\Gamma_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ .

- i) Definir solución clásica y débil en un espacio adecuado  $V \subset H^1(\Omega)$ .
- ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iii) Probar que existe una solución única en  $V$  de la formulación débil.

**Ejercicio 5** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado. Sean  $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  que verifican la condición de elipticidad:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \chi_i \chi_j \geq \alpha |\chi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0$$

Sea también  $a_0(x) \in C(\bar{\Omega})$ . Se busca una función  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

- i) Defina solución clásica y débil para este problema.
- ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iii) Probar que para  $a_0(x) \geq 0$  en  $\Omega$  y  $f \in L^2$  existe una solución única en  $H_0^1(\Omega)$  de la formulación débil.

**Ejercicio 6** (a) Dado el problema variacional

$$a(u, v) = \int f v \quad \text{para todo } v \in V$$

con  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal simétrica. Considere la respectiva aproximación de Galerkin sobre un espacio discreto  $V_h = V_h^1 \oplus V_h^2 \subset V$  que posee la propiedad de que  $a(v_h^1, v_h^2) = 0$  para todo par  $v_h^1 \in V_h^1, v_h^2 \in V_h^2$ . Demuestre que  $u_h = u_h^1 + u_h^2$  es solución de la aproximación de Galerkin si y solo si los  $u_h^i$  resuelven respectivamente

$$a(u_h^i, v_h^i) = \int f v_h^i \quad \text{para todo } v_h^i \in V_h^i$$

- (b) Tome  $a(u, v) = \int_0^1 u' v'$  y  $V = H_0^1(0, 1)$  en el item previo y considere  $(0, 1) = I = \cup_{i=0}^{N-1} I_i$ ,  $I_i = (x_i, x_{i+1})$ , con  $x_{i+1} = x_i + h$ . Tome entonces

$$V_h^1 = \{u \in H_0^1 \mid \text{tal que } u \in P_1(I_i) \text{ para todo } 0 \leq i \leq N-1\} = \langle \phi_1, \dots, \phi_{N-1} \rangle$$

con  $\phi_i(x_j) = \delta_i^j$ , y sea  $V_h^2 = \langle \hat{\phi}_0, \dots, \hat{\phi}_{N-1} \rangle$  con

$$\hat{\phi}_i = \begin{cases} \frac{4}{h^2}(x - x_i)(x_{i+1} - x) & x \in I_i \\ 0 & x \in I - I_i \end{cases}$$

Demuestre que  $V_h = V_h^1 \oplus V_h^2$  está en las hipótesis del item previo, y entonces se pide hallar los  $\beta_i$  que verifican  $u_h = \sum \alpha_i \phi_i + \beta_i \hat{\phi}_i$ .

**Ejercicio 7** Dar dos ejemplos de formas bilineales  $(a_{i,j})$  diferentes, que corresponden a formas variacionales distintas, pero den lugar al mismo operador diferencial.

**Ejercicio 8** Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Sea  $T_h$  una subdivisión de  $\Omega$  en elementos  $K$  (intervalos en  $\mathbb{R}$ , triángulos o cuadriláteros en  $\mathbb{R}^2$ , tetraedros en  $\mathbb{R}^3$ ). Probar que una función definida en todo  $\Omega$  y que es polinomial en cada elemento, pertenece a  $H^1(\Omega)$  si y sólo si es continua en  $\Omega$ .

**Ejercicio 9** Encontrar la dimensión de los siguientes espacios de funciones, definidas sobre un elemento  $K$  en  $\mathbb{R}^2$ :

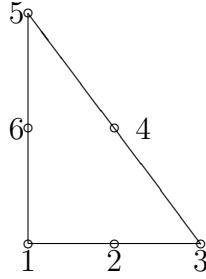
- i) funciones lineales
- ii) funciones cuadráticas
- iii)  $P_r(K) = \{v : v \text{ es un polinomio de grado } \leq r \text{ sobre } K\}$
- iv) funciones bilineales ( $v = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ ).

**Ejercicio 10** Sea  $C_h$  una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (es decir, una subdivisión de  $\Omega$  en triángulos que no se superponen, y tal que los vértices de ningún triángulo se encuentran sobre los lados de otro triángulo).

- i) Sea  $V_h$  el espacio de funciones continuas definidas en  $\Omega$ , lineales en cada triángulo de  $C_h$ . Probar que una función en  $V_h$  está únicamente determinada por su valor en los nodos de  $C_h$  (incluyendo los pertenecientes al borde de  $\Omega$ ). Verificar que la función resulta continua.
- ii) Sea  $V_h$  el espacio de funciones continuas definidas en  $\Omega$ , cuadráticas en cada triángulo de  $C_h$ . Probar que una función en  $V_h$  está únicamente determinada por ejemplo por su valor en los nodos de  $C_h$  (incluyendo los pertenecientes al borde de  $\Omega$ ) y en el punto medio de cada lado de los elementos de  $C_h$ .

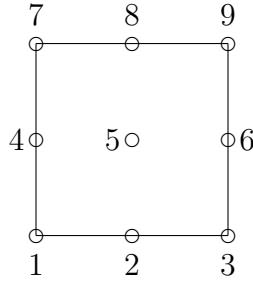
**Ejercicio 11** Sea  $T_h$  una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Sea  $V_h$  el espacio de funciones continuas definidas en  $\Omega$ , cuadráticas en cada triángulo de  $T_h$ .

- i) Explicar como elegiría los nodos en cada triángulo para garantizar que una función en  $V_h$  esté únicamente determinada por su valor en los nodos elegidos.
- ii) Considere ahora el triángulo de referencia y los nodos  $n_j$ ,  $1 \leq j \leq 6$  como se indica en la Figura. Hallar  $\phi_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$  las funciones en  $V_h$  que satisfacen  $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$ .



**Ejercicio 12** Sea  $Q_h$  una subdivisión en rectángulos  $Q$ , con lados paralelos a los ejes coordinados de un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Sea  $V_h$  el espacio de funciones continuas definidas en  $\Omega$ , tal que en cada rectángulo es una función de  $Q_2 = \{v : v = \sum c_j p_j(x) q_j(y)\}$  donde  $p_j$  y  $q_j$  son polinomios de grado menor o igual a 2.

- Explicar como elegiría los nodos en cada rectángulo para garantizar que una función en  $V_h$  esté únicamente determinada por su valor en los nodos elegidos.
- Considera ahora el rectángulo de referencia  $[0, 1]^2$  y los nodos  $n_j$ ,  $1 \leq j \leq 6$  como se indica en la Figura. Hallar  $\phi_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$  las funciones en  $V_h$  que satisfacen  $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$ .



**Ejercicio 13** Consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio con borde poligonal, y  $T_h$  una triangulación del mismo. Sea  $K \subset T_h$  un triángulo de la partición. Llamamos:

$h_K$  = mayor de los lados de  $K$ ,

$\rho_K$  = diámetro del círculo inscripto en  $K$ ,

$$h = \max_{K \in T_h} h_K.$$

Probar que la condición  $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \beta \quad \forall K \in T_h$  es equivalente a que exista  $\theta_0 > 0$  tal que para cualquier ángulo  $\theta$  de cualquier triángulo  $K \in T_h$  se tiene  $\theta \geq \theta_0$  (esta condición es conocida como “condición del ángulo mínimo”).

**Ejercicio 14** Sea  $Q$  un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$ , con lados paralelos a los ejes. Considerar una subdivisión  $C_h$  de  $Q$  en subrectángulos que no se solapan tal que ningún vértice de ningún rectángulo pertenece al lado de otro rectángulo. Sea  $V_h$  el conjunto de funciones continuas definidas en  $Q$ , bilineales en cada subrectángulo. Probar que un elemento de  $V_h$  está únicamente determinado por su valor en los nodos de  $C_h$  (incluyendo los nodos en el borde de  $Q$ ).

**Ejercicio 15** Se desea aproximar

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x}$$

donde  $\hat{T}$  es el triángulo de referencia que tiene vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ .

a) Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.

b) Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{6} \left( f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

**Ejercicio 16** Sea  $T$  un triángulo genérico (no degenerado) de vértices  $a_1, a_2, a_3$ . Sea  $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$  la transformación afín que transforma  $\hat{T}$  en  $T$ . Usando el ejercicio 15 a) y haciendo un cambio de variables mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x) dx \sim |T| f(a_{123}),$$

donde  $a_{123}$  es el baricentro del triángulo  $T$ , es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

**Ejercicio 17** Procediendo en forma análoga al ejercicio previo y usando el ejercicio 15 b), mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x) dx \sim \frac{|T|}{3} \left( f(a_{12}) + f(a_{13}) + f(a_{23}) \right)$$

donde  $a_{ij}, i < j$  denota el punto medio del lado de vértices  $a_i$  y  $a_j$ , es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

**Ejercicio 18** i) Considerar el tetraedro de referencia:

$$\hat{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Si  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$  y  $\hat{a}_4$  son los vértices de  $\hat{T}$  Probar que la cuadratura:

$$\hat{Q}(f) = \frac{1}{6} f(\hat{a}_{1234}), \quad \text{siendo } \hat{a}_{1234} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4}{4}$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

ii) Probar que el volumen de un tetraedro con vértices: el origen,  $A, B$  y  $C$  viene dado por:

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

siendo  $x_A$  la coordenada  $x$  del vértice  $A$ , etc.

- iii) Sea  $T \subset \mathbb{R}^3$  el tetraedro con vértices  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Deducir, a partir del ítem anterior, una cuadratura sobre  $T$  que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

**Ejercicio 19** i) Dado un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ , definimos  $\mathcal{Q}_1(R) = \{f(x, y) = p(x)q(y), p, q \in \mathcal{P}_1\}$ . Probar que la cuadratura

$$\int_R f \sim \frac{|R|}{4} \left( f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) \right)$$

es exacta para  $f \in \mathcal{Q}_1$ .

- iii) Considerar el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega = [-1, 1] \times [0, 1] \\ u(x, y) = 0 & \text{si } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

y la partición  $\Omega = R_1 \cup R_2$ , donde  $R_1 = [-1, 0] \times [0, 1]$  y  $R_2 = [0, 1]^2$ . Escribir las bases locales de  $\mathcal{Q}_1$  sobre  $R_1$  y  $R_2$  (teniendo en cuenta los datos de borde), y calcule la matriz de rigidez usando la cuadratura del ítem anterior.

**Ejercicio 20** Considerar la subdivisión del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  que se obtiene trazando dos rectas paralelas a los ejes, y consiste de cuatro cuadrados. Numerar los nodos de la siguiente manera:  $N_1 = (0, 0), N_2 = (1, 0), N_3 = (1, 1), N_4 = (0, 1), N_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), N_6 = (1/2, 0), N_7 = (1, 1/2), N_8 = (1/2, 1), N_9 = (0, 1/2)$ . Hallar la solución del sistema variacional discreto del ejercicio 2 con  $f = 1$ , usando elementos finitos bilineales .

**Ejercicio 21** Hacer un programa para resolver la ecuación de Poisson  $-\Delta u = f$  con condición de borde  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , en un polígono convexo  $\Omega$  usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error  $\|u - u_h\|$  en diversas normas y graficar en función de  $h$ .

**Ejercicio 22** Hacer un programa para resolver la ecuación  $-\Delta u + u = f$  con condición de borde  $u|_{\partial\Omega} = g$ , en un polígono convexo  $\Omega$  usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error  $\|u - u_h\|$  en diversas normas y graficar en función de  $h$ .

**Ejercicio 23** (a) Considere el tetraedro de referencia:

$$\hat{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Si  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  son los vértices de  $\hat{T}$  y  $x_5$  su baricentro, determine valores  $w_1, w_2, w_3, w_4$  y  $w_5$  de manera que la cuadratura:

$$\int_{\hat{T}} f \sim \sum_{i=1}^5 w_i f(x_i)$$

sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2. (Sug.: aproveche las simetrías del problema para simplificar las cuentas).

- (b) Sea  $T \subset \mathbb{R}^3$  el tetraedro con vértices  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Deduzca, a partir del ítem anterior, una cuadratura sobre  $T$  que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.
- (c) ¿Qué dimensión tiene  $\mathcal{P}_1(T)$ ?
- (d) Pruebe que todo polinomio de  $\mathcal{P}_1(\widehat{T})$  queda únicamente determinado por su valor en las esquinas de  $\widehat{T}$ .

**Ejercicio 24** [Lema de Aubin-Nitsche] Considerar el problema  $-\Delta u = f$  en  $\Omega$  con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y  $f \in L^2$ . Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación de  $\Omega$  de tamaño  $h$  y  $V_h$  el espacio de las funciones lineales a trozos que satisfacen las condiciones de contorno. Notamos  $u_h \in V_h$  a la aproximación de  $u$  por elementos finitos. Probar que:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}$$

Concluir que si vale la estimación a priori  $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ , se tiene que:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(Sug.: Considerar el problema auxiliar  $-\Delta w = u - u_h$ .)

**Ejercicio 25** Dada  $f \in L^2(0, 1)$   $0 < \alpha \leq 1$ , considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u' = f & \text{en } (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

- (a) Plantear el Problema Variacional asociado y mostrar que existe una única solución.  
 (b) Plantear el Problema Variacional Discreto asociado si se usa el subespacio  $V_h \subset V$  en dónde

$$V_h = \{v \in V : v|_I \in \mathcal{P}_1\}.$$

Mostrar que existe solución única de este problema. Sean  $u$  la solución del Problema Variacional y  $u_h$  la del Problema Variacional Discreto, mostrar que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0, 1)} \rightarrow 0.$$

- (c) Asumiendo que  $u \in H^2(0, 1)$  y que existe  $c > 0$  tal que  $\|u\|_{H^2(0, 1)} \leq c\|f\|_{L^2(0, 1)}$ , probar que se tiene convergencia cuadrática en  $L^2(0, 1)$ , es decir, que existe  $k > 0$  tal que

$$\|u - u_h\|_{L^2(0, 1)} \leq kh^2 \|f\|_{L^2(0, 1)}.$$

**Ejercicio 26** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado Lipschitz con frontera poligonal,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$  considerar el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

- (a) Plantear el Problema Variacional asociado y mostrar que existe una única solución. Probar que la solución clásica es solución del problema variacional.

- (b) Plantear el Problema Variacional Discreto asociado si se usa el subespacio  $V_h \subset V$  en dónde

$$V_h = \{v \in V : v|_T \in \mathcal{P}_1(T)\}.$$

Mostrar que existe solución única de este problema. Sean  $u$  la solución del Problema Variacional y  $u_h$  la del Problema Variacional Discreto, mostrar que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

- (c) Probar que se tiene convergencia cuadrática en  $L^2(\Omega)$ .

Sug: Usar el siguiente resultado:

*Regularidad de solución y Estimación a priori:* Dada  $F \in L^2(\Omega)$ , y  $w$  la solución del problema  $-\Delta w + w = F$ , con condiciones de borde Dirichlet y/o Neumann homogéneas, entonces es sabido que  $w \in H^2(\Omega)$  y que existe  $C > 0$  tal que  $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|F\|_{L^2(\Omega)}$ .