Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2019

Práctica N° 5: Elementos Finitos 1D

Espacios de Sobolev

Ejercicio 1 a) Probar que la función definida como $h(x) = \exp(-1/x^2)$ para $x > 0$, $h(x) = 0$ para $x \leq 0$, pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$.

b) Probar que la función $g(x) = h(x-a)h(b-x)$, $a < b$ es $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $[a, b]$.

c) Construir una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en una bola o en un intervalo.

Ejercicio 2 a) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\ dx = 0\ \forall g \in L^2(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

b) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\ dx = 0$ para toda $g \in C_0^k(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

c) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\ dx = 0$ para toda $g \in C_0^\infty(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

Ejercicio 3 a) Demostrar que si $f, g \in L^p$ son tales que $\int_I f\phi' = -\int_I g\phi$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces g es única.

b) Si la f del item previo es derivable entonces $f' = g$.

Ejercicio 4 a) Dada una función $\psi \in C_0^0(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$ probar que $\theta = \omega - (\int_I \omega)\psi \in C_0^0(I)$ para todo $\omega \in C_0^1(I)$, además $\int_I \theta = 0$.

b) Si $I = (a, b)$, sea $\phi(x) = \int_a^x \theta$, probar que $\phi(x) \in C_0^1(I)$, más aún $\phi' = \theta$.

c) Si f en L^1_{loc} y $\int_I f\phi' = 0$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces $f = cte$ c.t.p. (Sug. tomar ϕ como en el item previo y utilizar el Ejercicio 2).

Ejercicio 5 Si $g \in L^1_{loc}(I)$ tomar $c \in I$ cualquiera, y escribir para $x \in I$ $\int_c^x g = v(x)$, entonces $\int_I v\phi' = -\int_I g\phi$ para todo $\phi \in C_0^1(I)$.

Ejercicio 6 Utilizando el ejercicio previo y tomando f y g como en el Ejercicio 3 deducir la identidad $f(x) = f(c) + \int_c^x g$ para casi todo x.

Ejercicio 7 Probar que si $f \in H^1(I)$ entonces $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$.

Ejercicio 8 Usando el ejercicio previo demostrar que si $u \in H_0^1(I)$, con $I = (a, b)$ entonces $u(a) = u(b) = 0$. Probar, utilizando este hecho, que para I acotado en $\mathbb{R}$ existe una constante C (dependiente de $|I|$) tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1 \qquad \text{(Desigualdad de Poincaré)}$$

y por ende

$$\|u\|_{H^1(0.1)} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1$$

Ejercicio 9 Sea $I = (-1, 1)$. Comprobar que:

a) La función $u(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y que $u' = H$, donde H es la función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

b) La función $H \notin W^{1,p}$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 10 Sea

$$u(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|^\epsilon}$$

con $0 < \epsilon < 1$ y $(x, y) \in B_R(0)$.

a) Probar que u tiene derivadas generalizadas de primer orden en $L^1(B_R(0))$; $u \in L^2(B_R(0))$ pero u no tiene representante continuo en $B_R(0)$.

b) Encontrar los valores de p para los que $u \in W^{1,p}(B_R(0))$.

Ejercicio 11 a) Demostrar que la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^{\frac{1}{3}}$$

está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ donde $B_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$.

b) ¿Para que valores de α la función $u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2))|^\alpha$ está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$?

Concluir que las funciones de H^1 no son necesariamente acotadas y por ende el resultado del Ejercicio 7 no se extiende a más dimensiones.

Teoría de Elementos Finitos 1D

Ejercicio 12 Probar que las siguientes formas bilineales son continuas y coercitivas en los respectivos espacios V

a) $V = \mathbb{R}^n$, $a(u, v) = vAu^t$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A definida positiva.

b) $V = L^2(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0, 1]$.

c) $V = H^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x)+u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0,1]$.

d) $V = H_0^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0,1]$.

e) $V = H^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los items previos, y k constante suficientemente chico. Es esta forma bilineal simétrica?

Ejercicio 13 Para los problemas 3 y 5 de la práctica anterior

a) Probar que existe una solución única en $H_0^1(I)$ de la formulación débil.

b) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2(\overline{I})$), y que proporciona una solución clásica.

Ejercicio 14 Sea $I = (0,1)$ y sean x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ una partición de I.

a) Definimos para cada $1 \leq i \leq N-1$, $\quad G_i(x) = \begin{cases} (1-x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1-x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$ Verificar que $G_i \in H_0^1(0,1)$ y que $\forall w \in H_0^1(0,1)$ se tiene que

$$\int_0^1 w'(s)G_i'(s)ds = w(x_i)$$

b) Dada $f \in L^2(0,1)$ considerar el problema

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Escribir el problema en forma variacional sobre H_0^1 y dar formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \ \text{ tal que } \ u \in P_1(I_i) \ \text{ para todo } \ 0 \leq i \leq N-1\}$$

- Demostrar que ambos problemas variacionales tienen solución única.
- Demostrar que $\int_0^1 (u-u_h)'v_h' = 0$ para todo $v_h \in V_h$. De aquí y del item previo concluya que $u(x_i) = u_h(x_i)$, i.e, la solución obtenida numéricamente interpola a u en los nodos (aquí u_h denota la solución del problema discreto). Verificar que efectivamene, en el ejercicio 8 sucede eso.

c) Hallar la matriz de rigidez (usando las bases de Lagrange).

Ejercicio 15 Demostrar que el problema variacional del ejercicio 12 de la práctica anterior tiene solución única sobre $H_0^2(0,1)$.

Ejercicio 16 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) = f(x) \text{ en } I = (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con $a \in C^1(\bar{I})$ y $b, f \in C(\bar{I})$.

a) Plantear la formulación débil del problema, en un espacio adecuado V.

b) Demostrar que para toda $u \in V$ se tiene que:

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(I)}$$

c) Probar que si $a \geq \alpha > 0$ y

$$\|b\|_\infty \leq \frac{1}{2} \min_{x \in [0,1]} a(x)$$

entonces existe una única solución del problema débil.

d) Probar que la solución débil es también solución del problema continuo.

Ejercicio 17 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + \beta u' = f & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

siendo $\beta > 0$.

a) Plantear la formulación débil de este problema, de la forma:

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

para un espacio adecuado V.

b) Probar que F y a son continuas, y que si β es suficientemente chico, a es coercitiva. Concluya existencia y unicidad de solución para el problema débil.

c) Sea $\mathcal{T}_h$ una partición unifome del intervalo $[0,1]$, de parámetro $h > 0$ dada por $\{x_i\}$, $x_i = ih$. Sea

$$V_h = \{f \in C([0,1]) : \ f|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1\}.$$

Considerar el problema discretizado:

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V_h \tag{2}$$

Si $u_h \in V_h$ es la solución de (2), y u es la solución de (1), probar, utilizando el lema de Cèa, que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ejercicio 18 Dada $f \in L^2(0,1)$, considere el siguiente problema:

$$\begin{cases} u \in C^2[0,1] \\ -u''(x) + au'(x) + u(x) = f(x) \qquad 0 < x < 1, \quad a \in \mathbb{R} \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la forma débil en un espacio adecuado V.

b) Probar que si $u \in C^2([0,1])$ es una solución débil entonces es solución clásica del problema (incluyendo las condiciones de borde).

c) Probar que si $u \in H^1(0,1)$ y $u(0) = 0$, entonces vale la desigualdad de Poincaré.

d) Probar que si $|a| < 2$, existe una solución única en V de la formulación débil.

e) Describir un espacio aproximante $V_h \subset V$, adecuado para este problema, y mostrar una base.

Ejercicio 19 Sea $I = (0,1)$ y $k(x)$ la función

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in I_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ k_2 & \text{si } x \in I_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

con $k_1, k_2 > 0$ constantes. Considerar el problema variacional: Hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$\int_I k(x) u' v' \, dx = \int_I v \qquad \forall v \in H_0^1(I). \tag{3}$$

a) Probar que (3) tiene una única solución u.

b) Probar que u es solución (en sentido clásico) de

$$\begin{cases} -k(x)u'' = 1 & \text{en } I_1 \cup I_2 \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \text{ continua en } x = \dfrac{1}{2} \\ k_1 u'\left(\dfrac{1}{2}^{(-)}\right) = k_2 u'\left(\dfrac{1}{2}^{(+)}\right). \end{cases}$$

c) Discretizar la ecuación usando elementos finitos lineales sobre una malla uniforme con $2N$ intervalos de longitud $h = \frac{1}{2N}$. Hallar la matriz de rigidez y el vector independiente del sistema resultante de tamaño $(2N-1) \times (2N-1)$.

d) Interpretar desde el punto de vista de diferencias finitas cómo queda impuesta la condición sobre la derivada de u en $x = \frac{1}{2}$ en la discretización dada en (c).