Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2019

Práctica N° 4: Elementos Finitos (Introducción).

Notación: *Designaremos* $V^k = \{v : v \text{ es una función } C^{(k-1)}([0,1]),$ *con derivada* $v^{(k)}$ *continua a trozos y acotada en [0,1]}, y* V_0^k *al subespacio de* V^k *de funciones que se anulan en el borde, más precisamente,* $V_0^k = \{v \in V^k : v(0) = v(1) = ... = v^{(k-1)}(0) = v^{(k-1)}(1) = 0\}$.

Notaremos $< u, v >= \int_0^1 uvdx$.

Para una función dada f*, llamaremos (D) al siguiente problema de valores de contorno:*

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(V) será el problema variacional:

$$\textit{Encontrar } u \in V \textit{ tal que } < u', v' >=< f, v >, \quad \forall v \in V_0^1.$$

Ejercicio 1 Probar que si w es continua en $[0,1]$ y $\displaystyle\int_0^1 wv\, dx = 0 \ \ \forall v \in V_0^1$, entonces $w(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$.

Ejercicio 2 Probar que si u satisface el problema (V), y u'' existe en el sentido habitual y es continua, u es también solución del problema (D).

Ejercicio 3 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ en } I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{I})$.

a) ¿Cómo definiría una solución débil?

b) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

Ejercicio 4 Sean f una función prefijada en $C(\overline{I})$, α y $\beta \in \mathbb{R}$. Realizar un análisis como el del ejercicio anterior para el problema no homogéneo:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ en } I = (0,1) \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta \end{cases}$$

Ejercicio 5 Sean f una función prefijada en $C(\bar{I})$. Realizar un análisis similar para el problema con condiciones de Neumann homogéneas:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \quad \text{en} \quad I = (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6 Probar que el espacio vectorial V de las poligonales con vértices en $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\phi, \psi) = \sum_0^n \phi(x_i)\psi(x_i)$.

Ejercicio 7 Considerar una partición uniforme del intervalo $(0,1)$, $\bigcup_1^N I_i = (0,1)$. Construir el sistema lineal resultante, para las ecuaciones dadas en los Ejercicios 3, 5, al realizar aproximaciones de Galerkin con

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0(0,1), \quad \text{tales que} \quad \phi \quad \text{es lineal en cada} \quad I_i\}$$

defininiendo las condiciones de borde adecuadas en cada caso.

Ejercicio 8 Para el espacio

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0(0,1), \text{ tales que } \phi \text{ es cuadrática en cada } I_i\}$$

construir bases adecuadas y obtener la matriz de rigidez para el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 9 Encontrar la solución discreta correspondiente al problema variacional:

$$\text{hallar } u \in V_0^1(I) \text{ tal que } < u', v' >=< f, v > \quad \forall v \in V_0^1(I)$$

utilizando discretizaciones con 2, 4, 8 y 16 elementos. Usar elementos lineales, y cuadráticos. En cada caso calcular las normas $\|u - u_h\|_{L^\infty}$, $\|u - u_h\|_{L^2}$, y $\|u' - u_h'\|_{L^2}$ (donde u es la solución clásica), y graficarlas en función de h. Para los casos:

a) $f = 1$. ¿Qué sucede cuando se usan elementos cuadráticos?

b) $f = x$.

Ejercicio 10 Repetir el ejercicio anterior pero para el problema variacional correspondiente al ejericicio 3 con $f(x) = e^x$.

Ejercicio 11 Definir

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0([0,1]), \quad \text{tales que} \quad \phi \quad \text{es cúbica en cada} \quad I_i\}$$

y probar que en general V_h no está incluido en V^2. Pensar cómo definir un subespacio $W_h \subset V_h$ tal que $W_h \subset V_0^2$. Construir las bases para W_h.

Ejercicio 12 Considere el problema de contorno:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Aquí u representa, por ejemplo, la deflexión de una barra empotrada en sus extremos y sujeta a una fuerza transversal de intensidad f. Llevar el problema a la forma débil: Hallar $u \in V_0^2(0,1)$ tal que

$$< u'', v'' >=< f, v > \qquad \forall v \in V_0^2(0,1)$$

Discretice este problema utilizando el ejercicio anterior.