

# ÁLGEBRA III

## Práctica 7 – Segundo Cuatrimestre de 2018

### Derivaciones

**Ejercicio 1.** Sea  $A$  un anillo y  $G$  un subgrupo finito de automorfismos de del anillo  $A$ . Muestre que si  $D \in \text{Der}(A)$  y  $g \in G$  entonces  $g \circ D$  y  $D \circ g$  no son necesariamente derivaciones, pero  $g \circ D \circ g^{-1}$  sí lo es. Es decir,  $G$  actúa en  $\text{Der}(A)$  via  $({}^g D)(a) = g(D(g^{-1}(a)))$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $A$  un anillo y  $G$  un subgrupo finito de automorfismos de  $A$ . Denotamos

$$\text{Der}(A)^G = \{D \in \text{Der}(A) : gD = Dg \forall g \in G\}.$$

Muestre que si  $D \in \text{Der}(A)^G$  entonces  $D(A^G) \subseteq A^G$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $E$  un cuerpo y  $G$  un grupo finito de automorfismos de  $E$ , sea  $K := E^G$ . Muestre que la restricción de  $E$  en  $K$  define una biyección

$$\text{Der}(E)^G \cong \text{Der}(K).$$

**Ejercicio 4.** Sea  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -bimódulo, y  $D : A \rightarrow M$  una derivación. Muestre que  $R := \text{Ker}(D)$  es un subanillo (en particular  $D(1) = 0$ ), y es el máximo subanillo para el cual  $D$  es  $R$ -lineal (tanto a izquierda como a derecha). Muestre que si  $u \in A$  es una unidad, entonces

$$D(u^{-1}) = -u^{-1}D(u)u^{-1}$$

(en particular, si  $A$  es conmutativo y  $M$  es  $A$ -simétrico,  $D(1/f) = -D(f)/f^2$ ). Concluya que  $u \in R$  si y sólo si  $u^{-1} \in R$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $k$  un cuerpo de característica  $p$ ,  $\alpha \in \bar{k} \setminus k$  tal que  $\alpha^p = \lambda \in k$ . Sea  $E = k[\alpha]$ . Muestre que la aplicación  $D : E \rightarrow E$  dada por  $D(\alpha^i) = i\alpha^{i-1}$  ( $i = 0, \dots, p-1$ ) es una derivación.

**Ejercicio 6.** Sea  $k$  un cuerpo de característica  $p > 0$  tal que  $k^p = k$ . Si  $t$  es trascendente sobre  $k$ ,  $E = k(t)$  y  $d(f) = \partial_t f$ , muestre que  $\text{Ker}(d) = k(t^p)$ . Sea  $F = k(u)$  con  $u = t^p$ , observe que  $\partial_u : F \rightarrow F$  no se puede extender a una derivación de  $E$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $E = k(x)$  con  $D(f) = f'$  y  $\text{car}(k) = 0$ . Muestre que  $\text{Ker}(D) = k$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $E = k(x, y)$  con  $x$  e  $y$  algebraicamente independientes y  $D(f) = \partial_x f + y\partial_y f$  (y  $\text{car}(k) = 0$ ). Muestre que  $\text{Ker}(D) = k$ .

**Ejercicio 9.** Sean  $K$  cuerpo diferencial con subcuerpo de constantes  $C$  algebraicamente cerrado de característica cero y  $A$  un anillo diferencial que es una extensión diferencial de  $K$ . Muestre que si  $A$  tiene un ideal diferencial, entonces  $A/I$  también es una extensión (de anillos) diferencial de  $K$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $K$  un cuerpo diferencial y fijemos una ecuación diferencial lineal con coeficientes en  $K$  de la forma

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y.$$

Sea  $A := K[y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}]$  el anillo de polinomios en  $n$  variables. Muestre que  $A$  admite una estructura diferencial que extiende la de  $K$  definiendo

$$d(k) = k', \quad \text{si } k \in K$$

$$d(y_i) = y_{i+1} \quad \text{si } i = 0, \dots, n-2$$

$$d(y_{n-1}) = a_{n-1}y_{n-1} + \cdots + a_1y_1 + a_0$$

concluya que  $E = \text{Frac}(A)$  es un cuerpo diferencial, y que  $y_0 \in E$  es solución de la ecuación.

**Ejercicio 11.** La construcción anterior podría generar nuevas constantes. Muestre por ejemplo que si  $f \in K \setminus 0$  es una solución de la ecuación

$$y' = ay$$

y  $A = k[y_0]$  es la construcción anterior para este caso, entonces  $y_0/f$  es una constante nueva  $A$  (y por lo tanto también en  $E = \text{Frac}(A)$ ). Muestre algún otro ejemplo con una ecuación de grado dos.

### Wronskiano

Sea  $(K, d)$  un cuerpo diferencial y consideremos una ecuación de la forma

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0$$

con  $a_i \in K$ . Sea  $E$  una extensión diferencial de  $K$  que contiene soluciones de la ecuación y que tienen las mismas constantes que  $K$ .

Sean  $y_1, \dots, y_n \in E$  soluciones de la ecuación y definamos

$$||W|| = ||W(y_1, \dots, y_n)|| := \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

la matriz Wronskiana y el Wronskiano su determinante  $W := \det ||W|| \in K$ .

**Ejercicio 12.** Muestre que  $W$  satisface la ecuación  $W' = a_{n-1}W$ .

**Ejercicio 13.** Si  $y_1, \dots, y_n, y_{n+1} \in E$  son soluciones de la ecuación y definimos

$$||\widetilde{W}|| := \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y_{n+1} \\ y_1' & \cdots & y_n' & y_{n+1}' \\ y_1'' & \cdots & y_n'' & y_{n+1}'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y_{n+1}^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y_{n+1}^{(n)} \end{pmatrix} \in K^{(n+1) \times (n+1)}$$

entonces  $\det ||\widetilde{W}|| = 0$ . Muestre que (eventualmente reordenando los índices), existen  $b_1, \dots, b_n \in K$  tales que

$$y_{n+1}^{(k)} = \sum_{i=1}^n b_i y_i^{(k)}, \quad \forall k = 0, \dots, n.$$

Más aún, muestre que para todo  $k = 0, \dots, n-1$  vale

$$0 = \sum_{i=1}^n b'_i y_i^{(k)}.$$

y concluya que si  $W \neq 0$  entonces los  $b_i$  son constantes y que por lo tanto, la dimensión, sobre el subcuerpo de constantes, del espacio solución, es a lo sumo  $n$ .

## Producto Tensorial

**Ejercicio 14.** Complete la demostración de

$$\text{Hom}_k(V \otimes_k W, T) \cong \text{Hom}(V, \text{Hom}_k(W, T))$$

**Ejercicio 15.** Si  $V$  o  $W$  es de dimensión finita entonces  $V^* \otimes W \cong \text{Hom}_k(V, W)$ . El isomorfismo es natural en las dos variables.

**Ejercicio 16.** Si  $V$  es de dimensión finita, bajo el isomorfismo  $\text{End}(V) \cong V^* \otimes V$ , la evaluación  $V^* \otimes V \rightarrow k$  dada por  $\phi \otimes v \mapsto \phi(v)$  se corresponde con la traza.

**Ejercicio 17.** Sean  $\{v_i\}_{i=1}^n$  y  $\{w_j\}_{j=1}^m$  bases de  $V$  y  $W$ , sea  $\{v_i^*\}$  la base dual en  $V^*$ , entonces  $v_i^* \otimes w_j$  se corresponde con la transformación lineal que en las bases anteriores tiene matriz  $E_{ij}$ .

**Ejercicio 18.** Si  $A$  y  $B$  son dos  $k$ -álgebras, entonces  $A \otimes_k B$  es una  $k$ -álgebra.

**Ejercicio 19.**  $k[x] \otimes_k k[x] \cong k[x, y]$ .

**Ejercicio 20.** Si  $G$  y  $H$  son dos grupos, entonces  $k[G] \otimes_k k[H] \cong k[G \times H]$ .

**Ejercicio 21.** Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres  $k$ -álgebras conmutativas, muestre que

$$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A \otimes_k B, C) \cong \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, C) \times \text{Hom}_{k\text{-alg}}(B, C).$$

**Ejercicio 22.** Sean  $E/k$  y  $F/k$  dos extensiones de  $k$  contenidas en un cuerpo  $C$ . Muestre que

$$[EF : k] = [E : k][F : k] \text{ si y solo si } EF \cong E \otimes_k F.$$

**Ejercicio 23.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra,  $A[t]/(t)^2 \cong A \otimes_k (k[t]/(t^2)) = A \oplus At$  con multiplicación

$$(a + bt)(c + dt) = ac + (bc + ad)t.$$

Muestre que  $\Phi : A \rightarrow A[t]/(t)^2$  de la forma

$$\Phi(a) = a + D(a)t$$

es un morfismo de  $k$ -álgebras si y sólo si  $D \in \text{Der}_k(A)$ .

## Separabilidad y derivaciones

**Ejercicio 24.** Sea  $f : R \rightarrow S$  un morfismo de anillos, son equivalentes:

1. el morfismo inducido por la multiplicación  $S \otimes_R S \rightarrow S$  admite una sección  $S$ -lineal tanto a izquierda como a derecha.
2. Para todo  $S$ -módulo  $N$  (en particular es  $R$ -módulo via  $f$ , el epimorfismo  $S \otimes_R N \rightarrow N$  se parte (como morfismo de  $S$ -módulos), de forma natural en la variable  $N$ .

Si una de estas dos condiciones se verifica, diremos que  $S$  es separable sobre  $R$  (en el sentido no necesariamente conmutativo).

**Ejercicio 25.**  $k \times k$  es separable sobre  $k$ , pero  $k[x]/(x^2)$  no.

**Ejercicio 26.** Muestre que  $M_n(A)$  es  $A$ -separable.

\* **Ejercicio 27.** Decidir si  $\mathbb{H}$  es separable sobre  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 28.** Sea  $E/k$  una extensión de cuerpos finita y separable (en el sentido clásico). Muestre que  $E \otimes_k \bar{k} \cong \bar{k} \times \cdots \times \bar{k}$  (tantas veces como  $[E : k]$ ). Más aún, muestre que para cada extensión de cuerpos  $F/k$ ,  $E \otimes_k F \cong$  un producto de cuerpos. Si  $F$  contiene a la clausura normal de  $E$  entonces  $E \otimes_k F \cong F \times \cdots \times F$  (tantas veces como  $[E : k]$ ).

**Ejercicio 29.** Sea  $E/k$  una extensión de cuerpos finita. Muestre que  $E/k$  es separable (en el sentido clásico) si y sólo si  $E \otimes_k E$  tiene a  $E$  como sumando directo de manera natural.

**Ejercicio 30.** Sea  $E/k$  finita, muestre que es separable (en el sentido clásico) si y solo si  $E \otimes_k E$  no tiene nilpotentes.

**Ejercicio 31.** Sean  $k \rightarrow R$  y  $R \rightarrow S$  dos morfismos de anillos.

1. Muestre que si  $S$  es  $k$ -separable, entonces  $S$  es  $R$ -separable.
2. Muestre que si  $S$  es  $R$ -separable y  $R$  es  $k$ -separable, entonces  $S$  es  $k$ -separable.

**Ejercicio 32.** Sea  $R \rightarrow S$  un morfismo de anillos, muestre que  $\Omega_{nc}^1(S/R) := \text{Ker}(S \otimes_R S \rightarrow S)$  es un  $S$  bimódulo, y  $d : S \rightarrow \Omega_{nc}^1(S/R)$  dado por

$$d(a) = 1 \otimes_R a - a \otimes_R 1$$

es una derivación que se anula en  $R$ , que tiene la propiedad universal siguiente:

Para todo  $S$ -bimódulo  $M$  y para toda derivación  $D : S \rightarrow M$  que se anule en  $R$ , existe un morfismo de bimódulos  $\hat{D} : \Omega_{nc}^1(S/R) \rightarrow M$  tal que  $D = \hat{D} \circ d$ .

**Ejercicio 33.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra, muestre que  $A$  es  $k$ -separable si y sólo si para todo  $A$ -bimódulo  $k$  siétrico, toda derivación de  $A$  en  $M$  es interior. (En particular si  $A$  es conmutativa, toda derivación  $k$ -lineal de  $A$  en  $A$  es cero.) *Sugerencia:* muestre primero que si  $A$  es separable sobre  $k$  entonces la derivación universal  $A \rightarrow \Omega_{nc}^1(A/k)$  es interior.

**Ejercicio 34.** Sea  $R \rightarrow S$  un morfismo de anillos *conmutativos*. Muestre que  $S \otimes_R S$  es también un anillo (¿qué es lo que falla para ser anillo cuando no son conmutativos?) y la multiplicación  $S \otimes_R S \rightarrow S$  es morfismo de anillos. Si  $I$  es el núcleo, llamamos  $\Omega_S^1(R) := I/I^2$ , que resulta un  $S$ -bimódulo simétrico. Muestre que  $d : S \rightarrow \Omega^1(S/R)$  dado por

$$d(a) = \overline{1 \otimes_R a - a \otimes_R 1}$$

es una derivación que se anula en  $R$ , que tiene la propiedad universal siguiente:

Para todo  $S$ -bimódulo simétrico  $M$  y para toda derivación  $D : S \rightarrow M$  que se anule en  $R$ , existe un morfismo  $S$ -lineal  $\widehat{D} : \Omega_R^1(S) \rightarrow M$  tal que  $D = \widehat{D} \circ d$ .

**Ejercicio 35.** Sean  $k \rightarrow R$  y  $R \rightarrow S$  morfismos de anillos conmutativos. Muestre que existe una sucesión exacta

$$\Omega_k^1(R) \otimes_R S \rightarrow \Omega_k^1(S) \rightarrow \Omega_R^1(S) \rightarrow 0$$

**Ejercicio 36.** Sea  $B$  una  $k$ -álgebra conmutativa,  $J \subset B$  un ideal, y  $A = B/J$ . Mostrar que existe una sucesión exacta

$$J/J^2 \rightarrow A \otimes_B \Omega_k^1(B) \rightarrow \Omega_k^1(A) \rightarrow 0$$

donde  $J/J^2 \rightarrow A \otimes_B \Omega_k^1(B)$  esta dada por  $\bar{x} \mapsto 1 \otimes dx$ .

**Ejercicio 37.**  $f : V \rightarrow W$ ,  $g : V' \rightarrow W'$  dos transformaciones lineales, entonces

$$\text{Ker}(f \otimes g : V \otimes V' \rightarrow W \otimes W') = \text{Ker}(f) \otimes V' + V \otimes \text{Ker}(g)$$

(la suma no necesariamente es directa!).

**Ejercicio 38.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra,  $V$  un  $k$ -espacio vectorial y  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda (en particular  $M$  también es un  $k$ -e.v.). Muestre que existe un isomorfismo natural (en  $M$ )

$$\text{Hom}_A(A \otimes_k V, M) \cong \text{Hom}_k(V, M).$$

**Ejercicio 39.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra, entonces la categoría de  $A$ -bimódulos  $k$ -simétricos se identifica con la de  $A \otimes_k A^{op}$ -módulos a izquierda, que a su vez se identifica con la de  $A \otimes_k A^{op}$ -módulos a derecha via

$$(a \otimes b) \cdot m = a \cdot m \cdot b = m \cdot b(\otimes a)$$

donde, estando definido uno de los tres casos, esa igualdad da la definición de los otros dos.

## Álgebra libre

**Ejercicio 40.** Sea  $V$  un  $k$ -espacio vectorial, se define

$$V^0 := k, \quad V^{\otimes 1} = V, \quad V^{\otimes n+1} := V^{\otimes n} \otimes V$$

y  $TV := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$  con la multiplicación determinada por

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s$$

Muestre que  $TV$  tiene la siguiente propiedad universal: Para toda transformación lineal  $f : V \rightarrow A$  donde  $A$  es una  $k$ -álgebra, existe un único morfismo  $\tilde{f} : TV \rightarrow A$  de  $k$ -álgebras tal que  $\tilde{f}|_V = f$ . en otras palabras, la restricción a  $V$  induce una biyección

$$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(TV, A) \cong \text{Hom}_k(V, A).$$

**Ejercicio 41.** Sea  $V$  de dimensión 1, digamos  $V = k.x$ , entonces  $TV \cong k[x]$ . Si  $\dim V \geq 2$  entonces  $TV$  no es conmutativa.

**Ejercicio 42.** Sea  $A = TV$  y  $A^e := A \otimes_k A^{op}$ . Muestre que  $\Omega_{nc}(TV)$  es libre sobre  $A^e$  de rango  $\dim V$ , mas precisamente,  $\Omega_{nc}(TV) \cong TV \otimes_k dV \otimes_k TV$  (como  $TV$ -bimódulo), donde  $dV$  es la imagen de  $V$  bajo  $d : TV \rightarrow \Omega_{nc}(TV)$ .