# Álgebra III

## Práctica 5 – Segundo Cuatrimestre de 2018

**Ejercicio 1.** Probar que:

1. Todo grupo abeliano es resoluble.
2. Todo $p$-grupo es resoluble.
3. $D_n$ es resoluble.
4. $\mathbb{S}_n$ es resoluble si y solo si $n \leqslant 4$.

**Ejercicio 2.** Mostrar explicitamente que las siguientes extensiones son resolubles por radicales:

1. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, i+\sqrt{3}]/\mathbb{Q}$
2. $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $f = (X^4-2)(X^2-5)$
3. $N/\mathbb{C}(a,b)$ cuerpo de descomposición de $f = X^2 + aX + b$
4. $N/\mathbb{C}(a,b,c)$ cuerpo de descomposición de $f = X^3 + aX^2 + bX + c$
5. $N/\mathbb{C}(a,b,c,d)$ cuerpo de descomposición de $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$

**Ejercicio 3.** Probar que el $65537-$ágono regular es construíble con regla y compás.

$*$ **Ejercicio 4.** Para hallar una *Lúnula de Hipócrates* de parámetros $(m : n)$ que admita una cuadratura se debe resolver

$$\left(\frac{\sin(m\theta)}{\sin(n\theta)}\right)^2 = \frac{m}{n}.$$

1. Probar que se trata de una ecuación algebraica en $x = \cos(\theta)$.
2. Probar que es equivalente a resolver $(y^m-1)^2 - \frac{m}{n} y^{m-n}(y^n-1)^2 = 0$.
3. Probar que las lúnulas cuadrables de parámetros $(m : n)$ son construíbles con regla y compás cuando $(m : n) = (2 : 1), (3 : 1), (3 : 2), (5 : 1)$ y $(5 : 3)$.

**Ejercicio 5.** Decimos que una extensión $E/\mathbb{Q}$ es construíble si todos sus miembros los son.

1. Probar que si $E/\mathbb{Q}$ está generada por números construíbles, entonces es construíble.
2. Probar que si una extensión es construíble, entonces su clausura normal también lo es.
3. ¿Existe una extensión $E/\mathbb{Q}$ de grado 4 que no sea construíble?

**Ejercicio 6.** Sea $G \subseteq \mathbb{S}_n$ un subgrupo transitivo que contiene una transposición

1. si también contiene un $(n-1)-$ciclo entonces $G = \mathbb{S}_n$.
2. si $n = p$ es un primo impar entonces $G = \mathbb{S}_p$.

**Ejercicio 7.** Sea $G \subseteq \mathbb{S}_{p+2}$ un subgrupo transitivo con $p$ primo impar. Supongamos que $G$ contiene una permutación de estructura cíclica $2, p$ (es decir, el producto de una transposición y un $p-$ciclo disjuntos). Probar que $G = \mathbb{S}_{p+2}$.

**Ejercicio 8.** Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado primo $\geqslant 5$. Suponer que $f$ tiene exactamente dos raices no reales. Probar que $f$ no es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$.

**Ejercicio 9.** Probar los siguientes polinomios no son resolubles por radicales sobre $\mathbb{Q}$.

(i) $X^5 - 14X + 7$ (ii) $X^5 - 7X^2 + 7$ (iii) $X^7 - 10X^5 + 15X + 5$

**Ejercicio 10.** Sea $m \in \mathbb{N}$ par y sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ enteros positivos pares con $r > 1$ impar. Sea $f = (X^2 + m)(X - a_1) \cdots (X - a_r) - 2$. Probar que:

1. $f$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.
2. Para $m$ suficientemente grande, $f$ tiene exactamente dos raíces no reales en $\mathbb{C}$.

$*$ 3. Probar que el ítem anterior sigue valiendo si se quita la hipótesis "$m$ suficientemente grande".

**Ejercicio 11.** Probar que para cada primo $p \in \mathbb{N}$, existe una extensión normal $E/\mathbb{Q}$ con grupo de Galois isomorfo a $\mathbb{S}_p$.

*Continuará ...*