

ÁLGEBRA III

Práctica 3 – Segundo Cuatrimestre de 2018

Extensiones normales, separables e inseparables

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- i) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.
- ii) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.
- iii) Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.
- iv) Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición un polinomio $f \in K[X]$, entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

- i) $X^p - a$, sobre \mathbb{Q} , con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.
- ii) $X^3 - 10$, sobre \mathbb{Q} y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
- iii) $X^4 - 5$, sobre \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.
- iv) $X^4 + 2$, sobre \mathbb{Q} y $\mathbb{Q}[i]$.
- v) $\prod_{i=1}^n (X^2 - p_i)$, sobre \mathbb{Q} , con $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.
- vi) $X^3 - 2$, sobre \mathbb{F}_7 .
- vii) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y \mathbb{F}_5 .
- viii) $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre \mathbb{C} y $n \in \mathbb{N}$.
- ix) $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre \mathbb{R} .

Ejercicio 3. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $x^3 + x^2 + x + 2$ y $x^3 + 2x + 1$ sobre \mathbb{F}_3 . Probar que son isomorfos como extensiones de \mathbb{F}_3 .

Ejercicio 4. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre \mathbb{F}_5 . ¿ Son isomorfos entre ellos?

Ejercicio 5. Sea E el cuerpo de descomposición de un $f \in K[X]$, con $\text{gr}(f) = n$. Probar que $[E : K] \mid n!$. Mostrar ejemplos donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.

Ejercicio 6. Sean $K \subseteq E \subseteq K[\alpha]$ cuerpos y

$$m(\alpha, E) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0 \in E[X]$$

el minimal de α sobre E . Probar que $E = K[a_{d-1}, a_{d-2}, \dots, a_0]$.

Ejercicio 7. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- i) Toda extensión finita es normal.
- ii) Toda extensión finita está contenida en una extensión finita normal.
- iii) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.
- iv) Todo K -morfismo $f : L \rightarrow L$ es un K -automorfismo.
- v) Si L/K es algebraica, entonces todo K -morfismo $f : L \rightarrow L$ es un K -automorfismo.

Ejercicio 8. Sea E/K una extensión normal y sea $K \subseteq F \subseteq E$ una subextensión. Probar que todo K -morfismo de F en E puede ser extendido a un K -automorfismo de E .

Ejercicio 9. Determinar cuales de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso, calcular $\text{Gal}(E/K)$ y $\text{Hom}_K(E, \bar{K})$.

- i) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]/\mathbb{Q}$.
- ii) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]$.
- iii) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$.
- iv) $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K . Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 11. Sea K el cuerpo de descomposición de $x^{p^n} - x$ sobre \mathbb{F}_p . Calcular $[K : \mathbb{F}_p]$.

Ejercicio 12.

- i) Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es normal pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ no lo es.
- ii) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

Ejercicio 13. Sea H/K una extensión algebraica y sean E/K y F/K subextensiones normales. Probar que EF/K y $(E \cap F)/K$ son normales.

Ejercicio 14. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ vale que toda extensión de grado n sobre \mathbb{Q} es normal?

Ejercicio 15. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre \mathbb{Q} , \mathbb{F}_3 y \mathbb{F}_7 .

Ejercicio 16. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $m(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 17. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E : x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \{x \in E : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Probar que:

- i) E_s y E_i son subcuerpos de E .

- ii) E es puramente inseparable sobre E_s .
- iii) $E_s \cap E_i = K$.
- iv) Si E/K es normal, entonces E/E_i es separable y $E = E_s E_i$.

Ejercicio 18. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:

- i) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.
- ii) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

Ejercicio 19. Sea K un cuerpo de característica p , y sean $\alpha, \beta \in \overline{K}$ elementos no nulos tales que α es separable sobre K y β es puramente inseparable sobre K . Probar que $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \beta) = K(\alpha\beta)$.

Ejercicio 20. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de $x^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Probar que el grado de inseparabilidad de $K[\alpha]/K$ es p^m con $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k | r\}$.

Ejercicio 21. Sea p un primo impar y sea $f = X^{2p} + uvX^p + v \in K(u, v)[X]$. Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p(u, v)}$ una raíz de f . Probar que:

- i) $\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha]/\mathbb{F}_p(u, v)$ no es normal.
- ii) Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{F}_p(u, v)$. Calcular $[E : \mathbb{F}_p(u, v)]$.
- iii) $[\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha] : \mathbb{F}_p(u, v)] = 2p$.
- iv) $\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha]/\mathbb{F}_p(u, v)$ no es separable ni puramente inseparable.

¿Qué pasa para $p = 2$?

Ejercicio 22. Sea p un primo impar y consideremos $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sea α una raíz de $f = x^{p^3} - tx^p + t \in K[x]$. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Hallar $[L : K]$.

Ejercicio 23. Sea K un cuerpo de característica p . Dentro de una clausura algebraica \overline{K} de K , definimos $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} : \sigma(x) = x \forall \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)\}$. Probar que:

- i) Si $p = 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = K$.
- ii) Si $p > 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$.

Continuará ...