Álgebra III

Práctica 3 – Segundo Cuatrimestre de 2018

Extensiones normales, separables e inseparables

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.

ii) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.

iii) Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.

iv) Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición un polinomio $f \in K[X]$, entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

i) $X^p - a$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.

ii) $X^3 - 10$,sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

iii) $X^4 - 5$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.

iv) $X^4 + 2$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[i]$.

v) $\prod_{i=1}^{n}(X^2 - p_i)$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.

vi) $X^3 - 2$, sobre $\mathbb{F}_7$.

vii) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{F}_5$.

viii) $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.

ix) $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $x^3 + x^2 + x + 2$ y $x^3 + 2x + 1$ sobre $\mathbb{F}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{F}_3$.

Ejercicio 4. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_5$. ¿ Son isomorfos entre ellos?

Ejercicio 5. Sea E el cuerpo de descomposición de un $f \in K[X]$, con $\mathrm{gr}(f) = n$. Probar que $[E : K] \mid n!$. Mostrar ejemplos donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.

Ejercicio 6. Sean $K \subseteq E \subseteq K[\alpha]$ cuerpos y

$$\mathrm{m}(\alpha, E) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0 \in E[X]$$

el minimal de α sobre E. Probar que $E = K[a_{d-1}, a_{d-2}, \ldots, a_0]$.

Ejercicio 7. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Toda extensión finita es normal.

ii) Toda extensión finita está contenida en una extensión finita normal.

iii) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.

iv) Todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.

v) Si L/K es algebraica, entonces todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.

Ejercicio 8. Sea E/K una extensión normal y sea $K \subseteq F \subseteq E$ una subextensión. Probar que todo K-morfismo de F en E puede ser extendido a un K-automorfismo de E.

Ejercicio 9. Determinar cuales de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso, calcular $\mathrm{Gal}(E/K)$ y $\mathrm{Hom}_K(E, \overline{K})$.

i) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]/\mathbb{Q}$.

ii) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]$.

iii) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$.

iv) $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 11. Sea K el cuerpo de descomposición de $x^{p^n} - x$ sobre $\mathbb{F}_p$. Calcular $[K : \mathbb{F}_p]$.

Ejercicio 12.

i) Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es normal pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ no lo es.

ii) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

Ejercicio 13. Sea H/K una extensión algebraica y sean E/K y F/K subextensiones normales. Probar que EF/K y $(E \cap F)/K$ son normales.

Ejercicio 14. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ vale que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

Ejercicio 15. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_7$.

Ejercicio 16. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $m(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 17. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E : x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \{x \in E : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Probar que:

i) E_s y E_i son subcuerpos de E.

ii) E es puramente inseparable sobre E_s.

iii) $E_s \cap E_i = K$.

iv) Si E/K es normal, entonces E/E_i es separable y $E = E_s E_i$.

Ejercicio 18. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:

i) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.

ii) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

Ejercicio 19. Sea K un cuerpo de característica p, y sean $\alpha, \beta \in \overline{K}$ elementos no nulos tales que α es separable sobre K y β es puramente inseparable sobre K. Probar que $K(\alpha, \beta) = K(\alpha+\beta) = K(\alpha\beta)$.

Ejercicio 20. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Probar que el grado de inseparabilidad de $K[\alpha]/K$ es p^m con $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \ : \ p^k | r\}$.

Ejercicio 21. Sea p un primo impar y sea $f = X^{2p} + uvX^p + v \in K(u, v)[X]$. Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p(u, v)}$ una raíz de f. Probar que:

i) $\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha]/\mathbb{F}_p(u, v)$ no es normal.

ii) Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{F}_p(u, v)$. Calcular $[E : \mathbb{F}_p(u, v)]$.

iii) $[\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha] : \mathbb{F}_p(u, v)] = 2p$.

iv) $\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha]/\mathbb{F}_p(u, v)$ no es separable ni puramente inseparable.

¿Qué pasa para $p = 2$?

Ejercicio 22. Sea p un primo impar y consideremos $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sea α una raiz de $f = x^{p^3} - tx^p + t \in K[x]$. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Hallar $[L : K]$.

Ejercicio 23. Sea K un cuerpo de característica p. Dentro de una clausura algebraica $\overline{K}$ de K, definimos $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$. Probar que:

i) Si $p = 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = K$.

ii) Si $p > 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ x^{p^n} \in K$ para algún $n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ejercicio 24. Un cuerpo K de característica p se dice *perfecto* si $K^{p^{-\infty}} = K$.

i) Probar que todo cuerpo de característica cero es perfecto.

ii) Si K es de característica $p > 0$, entonces es perfecto si y solo si el morfismo $\sigma : K \to K$ dado por $\sigma(x) = x^p$ es un automorfismo.

iii) Probar que todo cuerpo finito es perfecto.

iv) Probar que si K no es perfecto, entonces $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$.

v) $K^{p^{-\infty}}$ es perfecto y $\overline{K}/K^{p^{-\infty}}$ es separable.

vi) K es perfecto si y solo si toda extensión algebraica de K es separable.

vii) Si K es un cuerpo de característica $p > 0$, entonces $K(t)$ no es perfecto.

Ejercicio 25. Sea K un cuerpo y E/K una extensión algebraica.

i) Probar que si K es perfecto, entonces E es perfecto.

ii) Probar que si E es perfecto y E/K es separable, entonces K es perfecto.

iii) Probar que si E/K es finita y E es perfecto, entonces E/K es separable.

Ejercicio 26.

i) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[x]$ se factoriza linealmente en E. Probar que E es algebraicamente cerrado.

ii) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[x]$ tiene al menos una raíz en E. Probar que E es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 27. Probar que $\mathrm{Gal}\,(K(X)/K) \simeq \mathrm{PGL}(2,\mathrm{K})$, donde $\mathrm{PGL}(2,K) := \mathrm{GL}(2,K)/K^{\times}\mathrm{Id}$. *Sugerencia: recordar el ejer.* 19 *i) de la guía* 2.

Ejercicio 28. Sea E/K una extensión de K y sea $G = \mathrm{Gal}(E/K)$.

i) Sea H un subgrupo de G. Probar que $E^H = \{t \in E \,/\, f(t) = t \;\forall\, f \in H\}$ es una subextensión de E/K.

ii) Sea F/K una subextensión de E/K. Probar que $G_F = \{f \in G \,/\, f(t) = t \;\forall\, t \in F\}$ es un subgrupo de G.

Ejercicio 29. Sea $E = K(t)$ con t trascendente y K de característica cero. Si H es el grupo generado por las traslaciones $t \mapsto t + a$, $a \in t$, mostrar que $K(t)^H = K$.

Ejercicio 30. Sea $E = k(t)$ y σ el automorfismo determinado por $\sigma(t) = t^{-1}$. Calcular E^σ.

Ejercicio 31. Sea K un cuerpo con $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Sea $f \in K[X]$ tal que $f(X) = f(-X)$. Probar que existe $g \in K[X]$ tal que $f(X) = g(X^2)$.

Ejercicio 32. Probar que el producto de todos los 2^{100} números de la forma

$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \ldots \pm \sqrt{100}$$

I. es entero.

∗ II. es un cuadrado perfecto.

∗ **Ejercicio 33. (Resolvente de grado** 3**)** Sean $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ las raíces de $X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ y $\omega = \xi_3$ una raíz cúbica primitiva de la unidad. Se define $R(X)$ como el producto de los $X - \beta$ donde β recorre los 6 números de la forma $\alpha_r + \omega\alpha_s + \omega^2\alpha_t$ con $\{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}$.

1. Probar que $R(X) = S(X^3)$ con $S \in \mathbb{C}[X]$.

2. Hallar S en función de b y c cuando $a = 0$.

3. Deducir un método para resolver ecuaciones cúbicas.

$*$ **Ejercicio 34. (Resolvente de grado** 4**)** Sean $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ las raíces de $X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$. Se define $R(X)$ como el producto de los $X - \beta$ donde β recorre los 6 números de la forma $\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \pm \alpha_4$ con exactamente dos signos $+$ y dos $-$.

1. Probar que $R(X) = S(X^2)$ con $S \in \mathbb{C}[X]$.

2. Hallar S en función de b, c y d cuando $a = 0$.

3. Deducir un método para resolver ecuaciones de grado 4.

Derivaciones

Ejercicio 35. Si A es una k-algebra conmutativa y M un A-módulo, se define $\mathrm{Der}_k(A, M)$ como las derivaciones k-lineales. Sean $k \to A$ y $A \to B$ dos morfismos de anillos conmutativos (con lo cual A es k-algebra, y B es A-algebra y k-algebra) y sea M un B-módulo. Probar que se tiene la restricción $D \mapsto D|_A$ determina una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Der}_A(B, M) \to \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Der}_k(A, M)$$

Ejercicio 36. Sea E un cuerpo, $D : E \to E$ una derivación, si F es una subextensión tal que D

es F lineal, entonces $D(F) = 0$. Si $K := \mathrm{Ker}(D)$, entonces K es un subcuerpo y D es K-lineal.

Ejercicio 37. Con las notaciones anteriores, si $B/A/k$ son extensiones de cuerpos con B/A algebraica y separable, entonces $\mathrm{Der}_k(B, M) \cong \mathrm{Der}_k(A, M)$.

Ejercicio 38. Sea E/K algebraica y separable, y $D : E \to E$ una derivación. Demuestre que si D es K-lineal, entonces es identicamente cero.

Ejercicio 39. Sea $E/F/K$ tal que F/K es algebraica y separable. Probar que $\mathrm{Der}_k(E, E) = \mathrm{Der}_F(E, E)$.

Ejercicio 40. Sea $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces $\mathrm{Der}_k(A, A) \cong \oplus_{i=1}^n A\partial_i$. Si $E = k(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $\mathrm{Der}_k(E, E) \cong \oplus_{i=1}^n E\partial_i$.

Ejercicio 41. Sea k de característica $p > 0$ y $D = \frac{d}{dt} : k(t) \to k(t)$. Calcular $K = \mathrm{Ker}(D)$. Qué grado tiene $k(t)/K$?