Álgebra III

Práctica 2 – Segundo Cuatrimestre de 2018

Extensiones de cuerpos, polinomios minimales, elementos algebraicos y trascendentes

Nota: Con $m(x, K)$ se notará el polinomio minimal del elemento x sobre el cuerpo K y con ξ_n una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión, y sea $x \in E$ algebraico sobre K. Dada una subextensión F/K de E/K, probar que $m(x, F)$ divide a $m(x, K)$. Dar ejemplos con $m(x, F) = m(x, K)$ y con $m(x, F) \neq m(x, K)$.

Ejercicio 2. Calcular los siguientes polinomios minimales:

i) $m(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$.

ii) $m\left(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right)$.

iii) $m\left(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]\right)$.

iv) $m\left(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}\right)$.

v) $m\left(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}[i]\right)$.

vi) $m(w, \mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Calcular:

i) $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] : \mathbb{Q}]$.

ii) $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$.

iii) $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$.

iv) $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$.

v) $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

vi) $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

vii) $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

viii) $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

ix) $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

x) $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{4 + \sqrt{15}}, \sqrt{4 - \sqrt{15}}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

Ejercicio 4. Calcular $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right] : \mathbb{Q}\right]$ y $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}, \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

Ejercicio 5. Sea $E = K[a]$ una extensión finita de un cuerpo K. Para cada $\alpha \in E$ definimos $L_\alpha : E \to E$ la K-transformación lineal dada por $L_\alpha(x) = \alpha x$.

i) Probar que $m(a, K) = \chi_{L_a} := det(xI - L_a)$.

ii) ¿Para cuáles $\alpha \in E$ vale que $m(\alpha, K) = \chi_{L_\alpha}$.

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión. Probar que E/K es algebraica si y sólo si todo anillo A, con $K \subseteq A \subseteq E$, es un cuerpo.

Ejercicio 7. Sea F/K una extensión de cuerpos de grado impar. Probar que si $F = K[u]$ entonces $F = K[u^2]$.

Ejercicio 8. Sea $n \in \mathbb{N}$, $(n : 6) = 1$, y sea $F/\mathbb{Q}$ una subextensión de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ de grado n. Probar que $\left[F[\sqrt[3]{2}, i] : F\right] = 6$.

Ejercicio 9. Sean L/K y M/K dos subextensiones de grado finito de una extensión F/K. Probar que:

i) Si $\text{mcd}([L : K], [M : K]) = 1$, entonces $[L.M : K] = [L : K] \,.\, [M : K]$.

ii) Si $[L.M : K] = [L : K] \,.\, [M : K]$ entonces $L \cap M = K$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$. Sea E/K una extensión de grado 2. Probar que existe $a \in E$ tal que $E = K[a]$ y $a^2 \in K$. Probar que esto no es necesariamente cierto en característica 2.

Ejercicio 11. Factorizar $X^5 + 6X^3 + 15X^2 + 3$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-2})[X]$.

Ejercicio 12. Sea $a \in \mathbb{Z}[i]$ irreducible y sea K el cuerpo primo de $\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle$. Calcular $[\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle : K\,]$.

Ejercicio 13.

i) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular $m\,(\xi_p, \mathbb{Q}\,)$ y deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p\,] : \mathbb{Q}]$.

ii) Calcular $m\,(\xi_6, \mathbb{Q}\,)$.

iii) Probar que $m\,(\xi_n, \mathbb{Q}\,) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ si y sólo si n es primo.

iv) Probar que $\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.
Sugerencia: $\xi_5 + {\xi_5}^{-1}$.

v) Calcular $m(\xi_7 + {\xi_7}^{-1}, \mathbb{Q})$.

Ejercicio 14. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $a \notin \mathbb{Q}^p$.

i) Probar que $m\,(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}\,) = X^p - a$.

ii) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $m\,(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}\,)$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}\,]$ y $[K : \mathbb{Q}\,[\sqrt[p]{a}\,]\,]$.

Ejercicio 15. Se define $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C} : x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Probar que $\overline{\mathbb{Q}}$ es una extensión algebraica que no es finita. Probar que $\overline{\mathbb{Q}}$ es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 16. Sea $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una numeración de los primos positivos.

i) (a) Probar que $\forall\, a \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\,\right]$ con $a \notin \mathbb{Q}$ y $a^2 \in \mathbb{Q}$, existen $b \in \mathbb{Q}$ y enteros $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ tales que $a = b\sqrt{p_{i_1}} \cdots \sqrt{p_{i_k}}$.
Sugerencia: Probar por inducción un enunciado ligeramente más fuerte.

(b) Calcular $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\,\right] : \mathbb{Q}\,\right]$.

(c) Calcular la cantidad de subextensiones de grado 2 de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\,\right]/\mathbb{Q}$.

ii) Hallar $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_i}\,\right]_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{Q}\right]$.

iii) ¿Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_i}\,\right]_{i\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$?

iv) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado tal que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. Deducir $[K : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 17. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de E/K de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si E/K es puramente trascendente?

Ejercicio 18.

i) Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.

ii) Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K.

iii) Deducir que para todo cardinal infinito a existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal a.

Ejercicio 19.

i) Sea K un cuerpo y sea $f = g/h \in K(X) - K$, donde $g, h \in K[X]$ sin factores comunes. Probar que $[K(X) : K(f)] = max\,\{\text{gr}(g), \text{gr(h)}\}$.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $m\,(X, K(X^n))$.

iii) Probar que $\exp(2\pi i X)$ no es algebraico sobre $\mathbb{C}(X)$.

Sugerencia: considerar $X \mapsto X + 1$.

Ejercicio 20. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x + y$ o $x.\,y$ es trascendente sobre K.

ii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x + y$ es trascendente sobre K.

iii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x.\,y$ es trascendente sobre K.

iv) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{\,x, y\,\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

v) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{\,x, y\,\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

Ejercicio 21.

i) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] \to \mathbb{C}$ y que en cada caso $f\big(\,\mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]\,\big) \subseteq \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]$ (de hecho, vale la igualdad).

ii) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.

   (a) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big] \to \mathbb{C}$ pero, en general, $f\big(\,\mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big]\,\big) \not\subseteq \mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big]$.

   (b) Considerar $\mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d},\, \xi_3\big]$. ¿Qué sucede en este caso?

Ejercicio 22. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $x^8 - 2$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$. Hacer lo mismo con $x^4 + 2x^2 + 2$, $x^4 + 3x^2 + 1$, $x^6 + 3$ y $x^8 - 3$.

Continuará ...