

ANÁLISIS COMPLEJO - - SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2018

**Práctica N°5. Series**

1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} a) a_n = \frac{n+1}{2n+1}, & c) a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}, & e) a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right). \\ b) a_n = \frac{n}{2n^2+3}, & d) a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), & \end{array}$$

2. Demostrar que la serie de término general  $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$ ,  $n \geq 2$ ,

$$\begin{array}{ll} a) \text{ converge si } q > 0 \text{ y } p > 1, & c) \text{ diverge si } q > 0 \text{ si } p < 1, \\ b) \text{ converge si } q > 1 \text{ y } p = 1, & d) \text{ diverge si } 0 < q \leq 1 \text{ y } p = 1. \end{array}$$

3. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n, & c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} z^n, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}, \\ b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n, & d) \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n, & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n. \end{array}$$

4. **Repaso. Criterio de Weierstrass.** Sea  $X \subset \mathbb{C}$  un conjunto y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función tal que  $|u_n(x)| \leq M_n$  para todo  $x \in X$ . Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

**5. Criterios de convergencia de serie**

En lo que sigue,  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(z_n)_{n \geq 0}$  serán sucesiones de números complejos.

a) Supongamos que  $(a_n z_n)_{n \geq 0}$  converge. Demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) z_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - z_{n-1}) \text{ converge.}$$

b) **Criterio de Dedekind.** Demostrar que si  $\lim a_n = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  converge absolutamente y las sumas parciales de  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  están acotadas (es decir, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|\sum_{n=1}^k z_n| \leq M$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ) entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$  converge.

c) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  converge absolutamente y  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$  converge.

d) **Criterio de Dirichlet.** Sea  $(r_n)_{n \geq 1}$  una sucesión decreciente de números reales positivos tal que  $\lim r_n = 0$  y  $(z_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de números complejos. Demostrar que si las sumas parciales de  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  están acotadas, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n$  converge. (Sugerencia: usar el criterio de Dedekind.)

6. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n, & i) \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n, & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n, & j) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n z^n, \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n, & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n, & k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}. \\
 d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n, & h) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}, &
 \end{array}$$

7. Hallar los valores de  $z$  para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}, & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}, & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}, \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}, & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^n, \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}, & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}, & i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{z-\alpha}{1-\alpha z} \right)^n, |\alpha| < 1.
 \end{array}$$

8. Para  $m \in \mathbb{N}$  fijo, probar que los conjuntos de convergencia de las series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$  son iguales.

9. Probar que si el radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  es  $\rho > 0$ , entonces el de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$  es también  $\rho$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

10. Hallar los términos de orden  $\leq 3$  en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll}
 a) e^z \operatorname{sen} z, & c) \frac{e^z - 1}{z}, & e) \frac{1}{\cos z}, \\
 b) \operatorname{sen} z \cos z, & d) \frac{e^z - \cos z}{z}, & f) \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.
 \end{array}$$

11. Para  $n \in \mathbb{N}$ , hallar el desarrollo en serie de potencias de la función  $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$ . (Sugerencia:  $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}(\cdot)$ .)

12. Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie de potencias con radio de convergencia  $\rho > 0$ . Se dice que  $f(z)$  es *par (impar)* si  $a_n = 0$  para todo  $n$  impar (par). Mostrar que

- $f$  es par sii  $f(-z) = f(z)$  para todo  $z$  con  $|z| < \rho$ ,

- $f$  es impar sii  $f(-z) = -f(z)$  para todo  $z$  con  $|z| < \rho$ .
13. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  y  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  para  $n \geq 2$ .

- a) Probar que  $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge en un entorno del origen, y la función  $R(z)$  es una función racional. Hallar una fórmula explícita para  $R(z)$ .
- b) Descomponiendo  $R(z)$  en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de  $R(z)$  en serie de potencias.
- c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el  $n$ -ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

14. **Desarrollo analítico de funciones enteras.** Consideremos la función  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

- a) Mostrar que  $h$  es entera y calcular su derivada.
- b) Mostrar que  $h(z+w) = h(z)h(w)$ .
- c) Probar que  $h(z) = e^z$ .
- d) Deducir el desarrollo en serie de potencias de  $\operatorname{sen}(z)$  y  $\operatorname{cos}(z)$ .

15. **Desarrollo analítico del logaritmo.** Sea  $\operatorname{Log}$  la rama principal del logaritmo, y sean  $f(z) = \operatorname{Log}(z+1)$ ,  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ .

- a) Calcular el radio de convergencia de  $g$ .
- b) Calcular  $f'(z)$  y  $g'(z)$  para  $z$  dentro del radio de convergencia de  $g$ .
- c) Deducir que  $f(z) = g(z)$  para dichos  $z$ .

16. Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  dos series de potencia con radios de convergencia  $\rho_a, \rho_b$  respectivamente. Se define el producto de Cauchy de series de potencia como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ donde } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Probar que si el producto de Cauchy converge absoluta y uniformemente en  $|z| \leq r$  para todo  $r < \min\{\rho_a, \rho_b\}$ . Deducir que si  $\rho$  es el radio de convergencia del producto de Cauchy, entonces  $\rho \geq \min\{\rho_a, \rho_b\}$ .

17. **Función Zeta de Riemann.**

Para cada  $s \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(s) > 1$  definimos la función Zeta de Riemann de la siguiente manera:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

donde  $n^s = \exp(s \cdot \log n)$  se calcula usando la rama principal del logaritmo.

- i) Pruebe que converge en el semiplano  $\text{Re}(s) > 1$ , y que converge uniformemente en cada semiplano  $\text{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$ .
- i) Deducir que  $\zeta(s)$  es continua en el semiplano  $\text{Re}(s) > 1$ . (Más adelante resultará que es holomorfa allí)

18. Las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad s, a_n \in \mathbb{C} (*)$$

se denominan series de Dirichlet. La función zeta de Riemann del ejercicio anterior es el ejemplo más sencillo (allí  $a_n = 1$ ).

- i) Probar que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right|$$

no converge para todo  $s$  ni diverge para todo  $s$ , entonces existe un número real  $\sigma_a$  tal que la serie (\*) converge absolutamente si  $\text{Re}(s) > \sigma_a$  pero no converge absolutamente si  $\text{Re}(s) < \sigma_a$ . El semiplano  $\text{Re}(s) > \sigma_a$  se denomina *semiplano de convergencia absoluta* de la serie de Dirichlet (\*).

- ii) Probar que la serie converge uniformemente en cada semiplano  $\text{Re}(s) \geq \sigma_a + \varepsilon$ .
- iii) Deducir que define una función continua en  $\text{Re}(s) > \sigma_a$ .

19. Consideramos siguiente serie de Dirichlet

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

- a) ¿Cuál es su semiplano de convergencia absoluta ?
- b) Probar que si  $\text{Re}(s) > 0$  la serie  $L(s)$  converge. Sugerencia: recuerde los criterios vistos anteriormente.
- c) Probar que si  $\text{Re}(s) > 1$ ,

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} L(s)$$

Comentario: Esta fórmula puede usarse para extender la definición de  $\zeta(s)$  a la región  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0, s \neq 1\}$