Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica N°1: Números Complejos, Esfera de Riemann y Homografías

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

   a) $(i+1)(i-1)(i+3)$,
   b) $(3-2i)^2$,
   c) $\frac{1}{-1+3i}$,
   d) $\frac{1+i}{i}$,
   e) $\frac{2+i}{2-i}$,
   f) $(1+i)^{100}$,
   g) $(1+i)^{65} + (1-i)^{65}$.

2. . Determinar las partes reales e imaginarias de los siguientes números complejos, en términos de las de z:

   a) z^2,
   b) z^{-1},
   c) z^{-2},
   d) z^4,
   e) $\frac{1+z}{1-z}$,
   f) $\frac{i-z}{1+iz}$,
   g) $\frac{z}{z+1}$,

3. Sean z y w dos números complejos. Demostrar que:

   a) $\overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$,
   b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
   c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
   d) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
   e) $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

4. Probar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_n X^n + \overline{a}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0$. Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

5. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3-i)z - (1+2i) = 0$.

6. Para $z \in \mathbb{C}$, se define $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Probar que:

   a) Si $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$,
   b) $|zw| = |z|\,|w|$ y si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
   c) $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$,
   d) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w})$ y $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w})$,
   e) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,
   f) $|z+w| \leq |z| + |w|$ y $|z-w| \geq |z| - |w|$.

   Interpretar geométricamente la propiedad (e), también conocida como "Ley del paralelogramo".

7. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z,w) = |z-w|$ es una métrica.

8. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

   a) $|z - i + 3| = 5$,

   b) $|z - i + 3| \leq 5$,

   c) $\operatorname{Re}(2z + 3) \geq 0$,

   d) $\operatorname{Re}((1 + 2i)z) \geq 0$.

9. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{C}$, probar que $\alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \beta = 0$ representa una circunferencia, o una recta, o un punto o al conjunto vacío. Probar además que toda circunferencia o recta puede representarse de esta forma.

10. **Transformaciones Lineales y Representación Matricial de los Números Complejos**

    a) Probar que toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ puede escribirse de forma única como

    $$T(z) = \mu z + \lambda \overline{z}$$

    donde $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ y determinar estos números en función de T. Probar que T es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $\lambda = 0$, y en tal caso, T resulta la multiplicación por $T(1)$.

    b) Fijemos una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con coeficientes reales, y consideremos la transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que define A. Probar que son equivalentes

    - T es $\mathbb{C}$-lineal,
    - $a_{11} = a_{22}$ y $a_{21} = -a_{12}$.

    y en tal caso T es la multiplicación por $z_A = a_{11} + ia_{21}$.

    c) Deducir que la asignación del inciso anterior define una biyección

    $$A \in \mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \to z_A \in \mathbb{C}$$

    de modo que $z_{A+B} = z_A + z_B$, $z_{AB} = z_A z_B$ y $z_{Id} = 1$. Luego $\mathcal{M}$ resulta un cuerpo, con la suma y la multiplicación usual de matrices, isomorfo a $\mathbb{C}$.

Función Exponencial y Funciones Trigonométricas con argumentos complejos. Forma polar

11. **Definición**: Para $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$, se define $e^z = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$.

    a) Demostrar que para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $e^{w+z} = e^w e^z$.

    b) Describir los z tales que $e^z = 1$.

    c) Demostrar que si $e^z = e^w$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$.

    d) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

12. *a*) Mostrar que si $\alpha = re^{i\theta}$ $(r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R})$ es la *forma polar* del complejo α, entonces la transformación lineal T_α del ejercicio 10 se factoriza como una rotación en el plano complejo en el ángulo θ, seguida de una dilatación de factor r. Deducir que T_α preserva los ángulos entre los vectores.

    b) Hallar todas las transformaciones $\mathbb{R}$-lineales $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que preservan los ángulos entre los vectores. ¿Son todas de la forma T_α para algún $\alpha \in \mathbb{C}$?

13. *a*) Pasar de la forma $a + ib$ a la forma polar:

    1) $1 + i$, 2) $-5i$, 3) -3.

    b) Pasar de la forma polar a la forma $a + ib$:

    1) $3e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\pi}$, 3) $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

14. *a*) Para $n = 2, 3, 4, 5$, dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.

    b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que hay n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

15. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

    a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$.

    b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.

    c) Mostrar que la imagen de la recta $\{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral.

16. *a*) Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Mostrar que $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

    b) Generalizando las igualdades del ítem anterior, se define para $z \in \mathbb{C}$,

    $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

    Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$,

    $$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

    c) Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π.

    d) Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0$ y $\operatorname{sen} z = 0$ son los valores reales usuales.

    e) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$

    f) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \in \mathbb{R}$ y los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$.

    g) Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Hallar todas las soluciones de la ecuación $\cos z = \frac{5}{4}$.

17. Sean $a, b, b' \in \mathbb{R}$. Probar que si $|b| < |b'|$, entonces $|\cos(a+bi)| < |\cos(a+b'i)|$ y $|\operatorname{sen}(a+bi)| < |\operatorname{sen}(a + b'i)|$.

18. Sea $z \neq 1$. Probar que $1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$. Para $0 < \theta < 2\pi$, dar una fórmula para la suma $1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$.

Sucesiones de Números Complejos

19. *a*) Probar que si $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

    b) Dar un ejemplo donde no valga la recíproca.

20. *a*) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$? Repetir para $|\alpha| > 1$.

    b) Si $|\alpha| < 1$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\right) = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

21. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

b) $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

c) $\cos(n\pi) + i\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right)}{n^2}$,

d) $\left(\frac{(-1)^n+1}{3}\right)^n$,

e) ni^{2n+1}.

22. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los números complejos c tales que la sucesión definida de manera recursiva del siguiente modo:

$$z_0 = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

resulta acotada. Demostrar que $\mathcal{M} \subset \{|z| \leq 2\}$.

Plano Complejo ampliado. Esfera de Riemann

23. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S = S^2$ (la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 1 y centro en $(0,0,0)$). Sea $N = (0,0,1) \in S$, definimos la proyección estereográfica $\theta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera: $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ sii $(a,b,0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.

a) Probar que $\theta(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$ si $(x_1,x_2,x_3) \neq N$.

b) Probar que θ es una biyección y su inversa φ está dada por

$$\varphi(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\left(2\operatorname{Re}(z), 2\operatorname{Im}(z), |z|^2 - 1\right).$$

c) Calcular $\varphi\big(\operatorname{Re}(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(\operatorname{Im}(z) = 0\big)$.

24. Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, es decir, si z, $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\overline{d}(z,z') = ||\varphi(z) - \varphi(z')||$ donde $||a||$ representa la norma usual del vector a en $\mathbb{R}^3$.

a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que, restringida a $\mathbb{C}$, $\overline{d}$ resulta equivalente a la métrica usual (probando, por ejemplo, que $(\mathbb{C},\overline{d})$ y $(\mathbb{C},d_{usual})$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

b) Para $z,w \in \mathbb{C}$, verificar que $\overline{d}(z,w) = \frac{2|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ y $\overline{d}(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}},\overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

25. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el un único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta y, en caso contrario, una circunferencia.

Homografías

Definición: Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

26. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

27. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

28. *a*) Hallar homografías que transformen

    1) los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;

    2) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

    b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primer homografía del ítem anterior es la recta $\{\mathrm{Re}(z) = 1\}$.

29. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\overline{\alpha} z + 1}$$

transforma a la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en si misma y a α en 0 ($|\alpha| \neq 1$).

30. Dada una matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \quad \text{donde } \det(A) = ab - cd \neq 0$$

le asignamos la homografía

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Diremos que la matriz A representa a la homografía T_A.

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ no singulares que respresentan las homografías T_A y T_B respectivamente.

a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?

b) ¿qué homografía representa la matriz A^{-1}?

c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

d) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?

31. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si se puede escribir con coeficientes reales.

32. *a*) Dadas las funciones

    $t(z) = z + c$, $c \in \mathbb{C}$ fijo (traslación),

    $h(z) = a(z - z_0) + z_0$, $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z_o \in \mathbb{C}$ (homotecia de centro z_0 y razón a),

    $i(z) = z^{-1}$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ (inversión),

    describirlas geométricamente. Caracterizar la imagen, por cada una de ellas, de una circunferencia y de una recta.

    b) Probar que toda homografía se escribe como composición de funciones del inciso anterior.

    c) Describir la imagen por una homografía arbitraria de una circunferencia o recta.

33. Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

    a) El disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $f(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$.

    b) El medio-disco $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$ por $f(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$.

$c)$ El cuadrante $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0 \text{ y } \text{Re}(z) > 0\}$ por $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

34. Hallar homografías que transformen

$a)$ la circunferencia $|z| = 2$ en $|z+1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

$b)$ el semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\text{Im}(\alpha) > 0$).