Recta real extendida

En las clases prácticas habrán visto que a veces utilizamos, por ejemplo, al símbolo $+\infty$. Sin embargo, ¿qué significa? Por un lado empezamos la materia demostrando todo desde los axiomas, sin embargo al $+\infty$ ¿cuándo lo definimos? ¿Es acaso un número real?. Lo único que sabemos del $+\infty$ es que es mayor a todo x $\in \mathbb{R}$. Por ahí es un número real, si esto fuera cierto entonces debería cumplir con todos los axiomas. Pensar: ¿qué pasa con los axiomas de orden?

Adelantando la respuesta, concluimos que $+\infty$ no puede ser un número real. Sin embargo es muy útil tener un elemento más grande que todos, de hecho de esa forma valdría lo siguiente:

$$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, \text{ tiene supremo en } \mathbb{R}$$

Entonces definamos el siguiente conjunto conocido como recta real extendida y se nota $\mathbb{R}^*$.

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Y se definen las siguientes operaciones:

- $x + \infty = \infty + x = +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $x - \infty = -\infty + x = -\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $x.(\pm)\infty = (\pm)\infty.x = (\pm)\infty \qquad \text{Si } x > 0$
- $x.(\pm)\infty = (\pm)\infty.x = (\mp)\infty \qquad \text{Si } x < 0$
- $(+\infty) + (+\infty)) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty)) = (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
- $\dfrac{x}{\infty} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Como este conjunto contiene a los números reales, todo lo que demostremos usando los axiomas de $\mathbb{R}$ implican entonces que también lo demostramos para $\mathbb{R}$. Notar que la razón de definir este conjunto es por comodidad a la hora de escribir y hacer matemática. Parece algo obvio, pero ayuda mucho a la hora de pensar tener una notación cómoda, comprensible y coherente con nuestra intuición. Por ejemplo ahora podemos hablar de intervalos infinitos, por ejemplo $(1, +\infty)$, sin hacer mayores aclaraciones.