

Práctica No. 5

1. Analizar en cada caso la existencia de $\int_a^b f d\alpha$ y calcularla cuando exista.

(a) $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria y f constante sobre $[a, b]$.

(b) $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$; sea $c \in (a, b)$ y sea

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ la función } f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a, c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c, b] \end{cases}.$$

¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en c ?

(c) f como en el ítem anterior y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, c] \\ -1 & \text{si } x \in (c, b] \end{cases}$.

(d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a, b] = [-1, 3]$.

(e) $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$ y $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. Supongamos que $\int_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f . ¿Qué puede decir sobre la función α ? [Sug.: para cada $c \in [a, b]$ considere la función monótona f_c definida como $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ sino.]

3. Sean $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, se define

$$s_\pi := \sum_{k=1}^n f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})], \text{ donde } t_k \in [x_{k-1}, x_k]. \text{ Se define también la norma de } \pi \text{ como:}$$

$$\|\pi\| := \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Demostrar que si $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que cumple todas las condiciones siguientes:

i. $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.

ii. $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m\| = 0$.

iii. $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m} .

iv. Si $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, entonces cumple las condiciones ii. y iii. precedentes.

(b) Si ahora $g, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son otras funciones, tales que $g \in \mathfrak{R}(\beta)$ y para cada partición π notamos $r_\pi := \sum_{k=1}^n g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deducir que entonces existe

una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{\pi_m} = \int_a^b g d\beta$.

4. Otra definición de integral de Riemann-Stieltjes ¹

Con las mismas notaciones que en el ejercicio anterior: sean $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es integrable Riemann-Stieltjes[★] con respecto a la función α (notaremos $f \in \mathfrak{R}^\star(\alpha)$) si se cumple: existe un $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|s_\pi - A| < \varepsilon$ para toda partición π con $\|\pi\| < \delta$, independientemente de los valores de t_k . En este caso diremos que A es la integral de Riemann-Stieltjes[★] de f respecto a α .

(a) Demostrar que $\mathfrak{R}^\star(\alpha) \subseteq \mathfrak{R}(\alpha)$.

(b) Sean $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas así: si $c \in (a, b)$ entonces $f(x) = \alpha(x) = 0$ para $a \leq x < c$, $f(x) = \alpha(x) = 1$ para $c < x \leq b$, $f(c) = 0$ y $\alpha(c) = 1$. Demostrar que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ pero que $f \notin \mathfrak{R}^\star(\alpha)$.

[Sug.: considere particiones π tales que $c \in \pi$ para ver que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ y particiones π' tales que $c \notin \pi'$ para ver que $f \notin \mathfrak{R}^\star(\alpha)$.]

5. Sean $f; \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in (a, b)$ tales que $\int_a^c f d\alpha$ y $\int_c^b f d\alpha$ existen. Demostrar que $\int_a^b f d\alpha$ también existe y que vale la igualdad: $\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$.

6. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente.

Demostrar que si $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ y $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha$.

7. Para cada $x \in \mathbb{R}$ denotamos con $[x]$ a la parte entera de x , es decir: $[x] := \max \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$. Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

(a) $\int_0^4 x^2 d([x])$

(b) $\int_0^2 x d(x - [x])$

(c) $\int_0^2 x^2 d(|x|)$

¹ De la parte (b) de este ejercicio se deduce que la definición de integral de Riemann-Stieltjes[★] no es equivalente a la dada en clase; sin embargo la mayoría de las propiedades generales se preservan con ligeras modificaciones.