MATEMATICA 2 - 2do cuatrimestre 2016

Práctica 3 - Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\, 2x_2,\, 1 + x_1)$

   b) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

   c) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

   d) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3,\ \ f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

2. Interpretar geométricamente las siguientes transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

   a) $f(x, y) = (x, 0)$

   b) $f(x, y) = (x, -y)$

   c) $f(x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y \cos t)$, con $t \in \mathbb{R}$ fijo.

3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

   a) $tr : K^{n\times n} \to K$, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

   b) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m},\ \ f(A) = BA$ donde $B \in K^{r\times n}$ está dado

   c) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ \ \delta(f) = f'$

   d) $\Phi : C([0, 1]) \to C([0, 1]),\ \ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

   e) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K,\ \ \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$, donde $\alpha \in K$

4. *a*) Mostrar que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$, y que es única. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

   b) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

   c) Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

   $$f(1, 0, 1) = (1, 2, 1), \quad f(2, 1, 0) = (2, 1, 0), \quad f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1),$$
   $$g(1, 1, 1) = (1, 1, 0), \quad g(3, 2, 1) = (0, 0, 1), \quad g(2, 2, -1) = (3, -1, 2).$$

   Determinar si $f = g$.

   d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

5. *a*) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las tranformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

   b) Clasificar las transformaciones lineales tr y ϵ_α del Ejercicio 2 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

6. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4)$$

   a) Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$
   b) Determinar el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 6)\}$

7. Sea $S = \langle(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$
   b) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $\langle(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)\rangle + (0, 1, 1, 2)$

8. *a*) ¿Existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ epimorfismo? ¿Y un epimorfismo $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_4[X]$?
   ¿Existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ monomorfismo?
   ¿Y un monomorfismo $f : \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : tr(A) = 0\} \to \{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(1) = f'(1) = 0\}$?
   b) ¿Existe alguna t.l. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\} \subset \mathrm{Im}(f)$?
   c) ¿Existe algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$, donde $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$?

9. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que satisface $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$ en los siguientes casos:

   a) $S = \langle(1, 2, 1)\rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$,
   b) $S = \langle(1, -2, 1)\rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$.

10. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface lo pedido

   a) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$
   b) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \langle(1, 1, 2)\rangle$
   c) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
   d) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

11. Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \text{ para cada } k \in \mathbb{R} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Determinar el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$, y decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

13. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface lo pedido

    a) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$

    b) $f \neq \mathrm{Id}$ y $f \circ f = \mathrm{Id}$

14. *a*) Para $t = \pi$ en el Ejercicio 2.c), calcular f^2

    b) Hallar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \neq \mathrm{Id}$, tal que $f^3 = \mathrm{Id}$

    c) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \neq \mathrm{Id}$, tal que $A^3 = \mathrm{Id}$ ¿Y en $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

y sean las bases

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\} \ \subset \ \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}' &= \{(1,1,0,0), (1,-1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,1,-1)\} \ \subset \ \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

b) Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$

c) Calcular las matrices inversibles $Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$ donde $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. ¿Cuáles son?

16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

a) Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si A es la matriz de f en la base canónica,

1) ¿cuál es el rango de A?

2) encontrar matrices inversibles Q y P tales que

$$QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) ¿Existe una base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{R}^3$ para la cual $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

17. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$?

b) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Describir el conjunto $\{v \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(v) = w_1 - 3w_3 - w_4\}$.

18. Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

b) Verificar que f es un isomorfismo

c) Exhibir una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$. ¿Cuál es?

19. Para las siguientes $f : V \to V$, calcular $[f]_{\mathcal{E}}$, donde $\mathcal{E}$ es la base canónica

a) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$

b) $V = \mathbb{R}^{2\times2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{E} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$ $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$. Probar que f es un proyector (i.e. $f \circ f = f$) y encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en la cual $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido

a) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(-2, 1, 1)\rangle$

b) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$

y en caso que sea posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.