PROGRAMACIÓN LINEAL

Programación Lineal

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{PL})\ \max\, & c^T x \\
\text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Un Modelo de Producción

Un carpintero desea determinar la cantidad de sillas y mesas que debe producir la próxima semana.

Cuenta con 2 insumos importantes: madera y fierro. Dispone de 100 m^2 de madera, 60 m lineales de fierro y 50 horas-hombre por semana para el armado de las sillas y mesas.

Se requiere 1 m^2 de madera, 1 m de fierro y 1 hora-hombre para cada silla y 4 m^2 de madera, 2 m de fierro y 1 hora-hombre para cada mesa.

Se asume que se puede vender todo lo que se produce y que el beneficio por silla es de M$ 1 y por mesa de M$ 3.

Se debe decidir la cantidad de muebles que se fabricarán para maximizar el beneficio.

Un Modelo de Producción

Variables de Decisión:

- x_1: Cantidad de sillas que se fabrican en la semana.
- x_2: Cantidad de mesas que se fabrican en la semana.

Restricciones:

1. **Restricciones Generales:**

   a) 100 m^2 de madera:

   $$x_1 + 4x_2 \leq 100$$

   b) 60 m de fierro:

   $$x_1 + 2x_2 \leq 60$$

   c) 50 hrs-hombre:

   $$x_1 + x_2 \leq 50$$

2. **No Negatividad:**

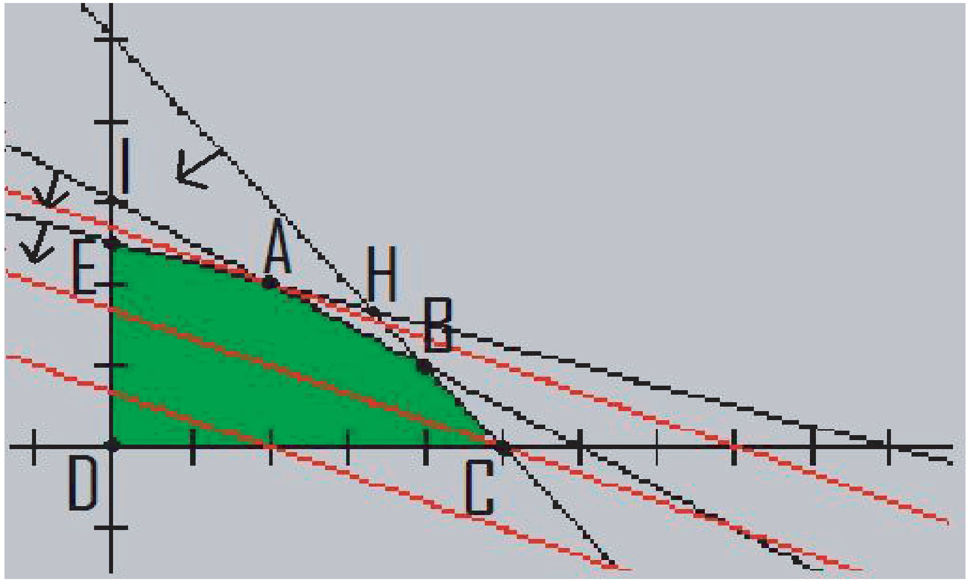
   $$x_1, x_2 \geq 0$$

Un Modelo de Producción

Función Objetivo:

$$\text{máx}\, z = x_1 + 3x_2$$

Gráfico:



A, B, C, D y E: Vertices del conjunto factible.

Para maximizar $c^T x$, desplazamos el hiperplano $c^T x = k$, en la dirección del gradiente de la función (el vector c).

Un Modelo de Producción

Más adelante se verá que si un problema lineal admite solución, entonces al menos uno de los vértices del conjunto factible es punto óptimo.

Así, para resolver el problema se podría evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices del conjunto factible y seleccionar aquel con función objetivo mayor.

Determinemos el punto A: corresponde a la intersección de las rectas que limitan los semiespacios generados por las restricciones 1a y 1b. Resolvamos el sistema:

$$\begin{gathered} x_1 + 4x_2 = 100 \\ x_1 + 2x_2 = 60 \end{gathered}$$

Así el punto A es (20,20).

Análogamente podemos determinar B, C, D y E, resultando:

Un Modelo de Producción

Vertice	x_1	x_2	z
A	20	20	80
B	40	10	70
C	50	0	50
D	0	0	0
E	0	25	75

Dado que para un problema lineal la condición de KKT es suficiente (si pensamos el problema como $\min -c^T x$) y que el punto A la satisface $\Rightarrow$ A es óptimo.

El vector gradiente de la función objetivo en A cambiado de signo $(-\nabla f(\mathrm{A}))$ se puede expresar como combinación lineal no negativa de los gradientes de las restricciones activas. O sea:

$$(1,3)^T = \lambda_1(1,4)^T + \lambda_2(1,2)^T, \text{ donde } \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Luego, en la solución óptima se necesitan 100 m^2 de madera, 60 m de fierro y 40 hrs-hombre (aunque no usemos todas las hrs-hombre disponibles).

Un Modelo de Producción

Asociaremos una variable, llamada variable de holgura, a cada restricción general. El valor de esta variable es la diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo de la restricción. En este caso:

$$x_3 = 100 - x_1 - 4x_2$$
$$x_4 = 60 - x_1 - 2x_2$$
$$x_5 = 50 - x_1 - x_2$$

En el óptimo: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 10$

Variables de Holgura

Vertice	x_3	x_4	x_5
A	0	0	10
B	20	0	0
C	50	10	0
D	100	60	50
E	0	10	25

En cada vértice las variables de holgura asociadas a las restricciones activas tienen valor 0 y las asociadas a las restricciones no activas, son positivas. (Propiedad Importante)

Análisis de Sensibilidad

Bajo qué variaciones de los parámetros la solución óptima mantiene sus características?

Se suelen estudiar los coeficientes de la función objetivo y del vector b. El interés fundamental de esto es que muchas veces los parámetros de un modelo pueden contener errores numéricos provenientes de su medición. Dado esto, es importante saber si estos errores pueden afectar mucho la solución.

Coeficientes de la Función Objetivo:
Cuál es el rango de variación del valor de un coeficiente de la función objetivo de modo que el punto óptimo continúe siendo el mismo?

Modificar el valor de un coeficiente de la F.O. significa modificar la pendiente del hiperplano que representa la F.O.

En nuestro ejemplo, cuál es el rango de valores en que puede variar el beneficio asociado a cada silla, de modo que A siga siendo óptimo?

Análisis de Sensibilidad

En el gráfico se ve que al variar la pendiente de la función objetivo el óptimo variará a E o B. Luego se debe variar la pendiente hasta que esto no ocurra, lo cual significa que se debe cumplir que:

$$z(A) \geq z(B)$$
$$z(A) \geq z(E)$$

Llamemos θ al beneficio unitario que da cada silla, luego:

$$z(A) \geq z(B) \Rightarrow (\theta, 3)^T(20, 20) \geq (\theta, 3)^T(40, 10)$$

$$\Rightarrow \theta \leq \frac{3}{2}$$
$$z(A) \geq z(E) \Rightarrow (\theta, 3)^T(20, 20) \geq (\theta, 3)^T(0, 25)$$
$$\Rightarrow \theta \geq \frac{3}{4}$$

Así, en el intervalo $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$ A sigue siendo óptimo (aunque el beneficio cambia).
Qué pasa en los extremos?
A sigue siendo óptimo pero existen óptimos múltiples.

Análisis de Sensibilidad

Coeficientes del vector b:
Modificar el valor de un coeficiente del lado derecho significa desplazar paralelamente el hiperplano asociado a la restricción correspondiente.

Se estudia cómo puede variar el valor de un coeficiente de b de manera que las características del punto óptimo se mantengan, es decir, que las restricciones que son activas en el óptimo sigan siéndolo y lo mismo para las no activas.

En el ejemplo corresponde a que el plan de producción mantiene sus características, sólo varían las proporciones:

1. Sensibilidad a la Disponibilidad de Fierro:
   Al ver el gráfico se puede observar que esta restricción se puede desplazar hacia un lado hasta que toque con E y hacia el otro hasta H.

Análisis de Sensibilidad

Sea β el valor de la disponibilidad del fierro, luego se debe cumplir que:

$$\Rightarrow \beta(E) \leq \beta \leq \beta(H)$$

Con $\beta(E)$ el valor del fierro si la restricción pasa por E y $\beta(H)$ lo mismo para H.
Así:

$$E = (0, 25) \Rightarrow \beta(E) = 50$$

$$H = \left(\frac{100}{3}, \frac{50}{3}\right) \Rightarrow \beta(H) = \frac{200}{3}$$

Con esto el rango de movimiento de β es $[50, \frac{200}{3}]$.
Cabe señalar que:

- Si $\beta = 50$, 1a y 1b son activas.
- Si $\beta = \frac{200}{3}$ todas las restricciones generales son activas, aunque 1b es redundante.
- Si $\beta < 50$, 1a y 1c son redundantes (óptimo sobre eje x_2).
- Si $\beta > \frac{200}{3}$, H es óptimo y 1a y 1c son activas.

Análisis de Sensibilidad

2. Sensibilidad a la Mano de Obra:
   Esta restricción es no activa en el óptimo A, por lo que si se desplaza esta recta en dirección contraria al origen, puede hacerlo indefinidamente sin que el óptimo cambie. Hacia el origen puede desplazarse hasta que contenga a A, sin que cambie el óptimo.

   Sea γ la disponibilidad de mano de obra. En el óptimo la mano de obra es igual a 40 ($x_1 + x_2 = 20 + 20 = 40$). Así en el rango $[40, +\infty)$ no hay problemas.

   Si $\gamma = 40$ todas las restricciones son activas pero 1b es redundante.

3. Sensibilidad de la Disponibilidad de Madera:
   Análogamente al caso del fierro tenemos que se debe cumplir que:

$$\beta(B) \leq \beta \leq \beta(I)$$

$$\Rightarrow 80 \leq \beta \leq 120$$

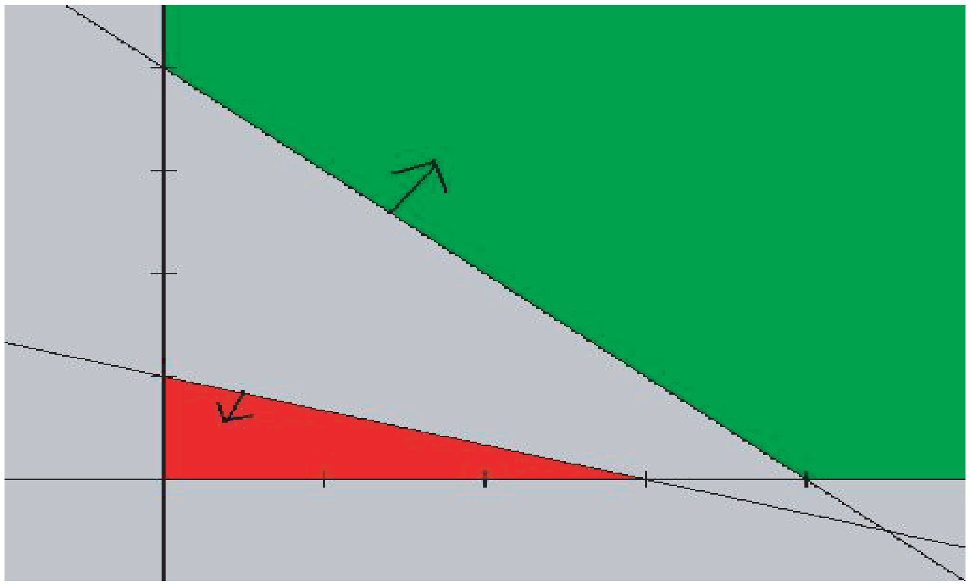
Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

1. **Problema Infactible:**

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lcccc} \text{s.a.} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

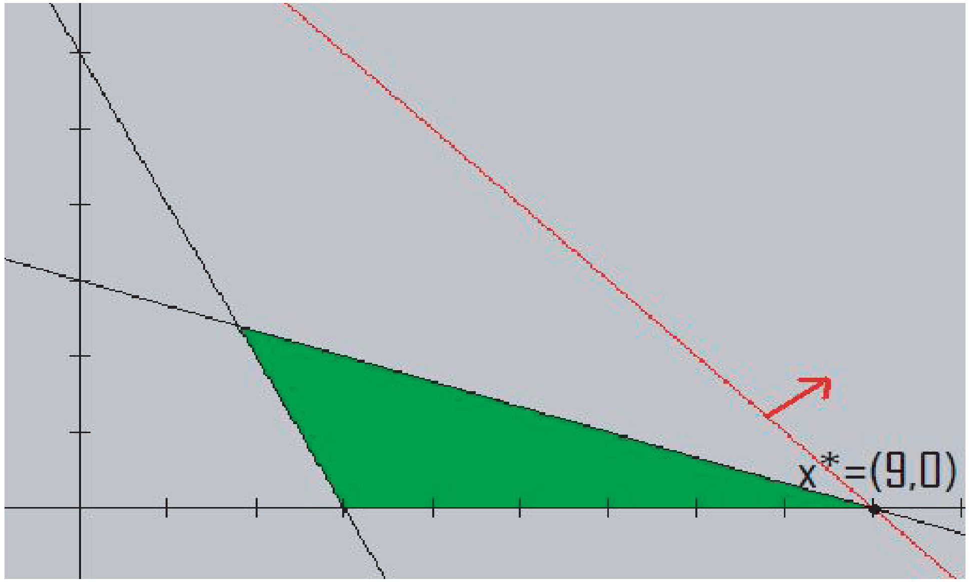


Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

2. **Problema con Solución Óptima Única:**

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{lcccccc} \text{s.a.} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

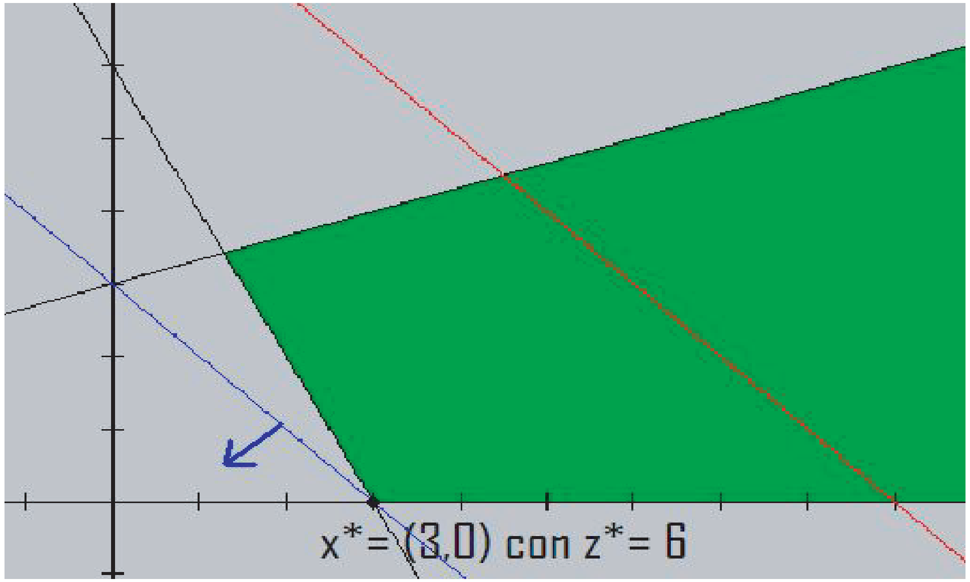


Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

3. **Conjunto Factible No Acotado:**

   a) **Solución Óptima Finita:**

$$\begin{array}{lrcrcr} & \multicolumn{5}{c}{\min z = 2x_1 + 2x_2} \\ \text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$



Si la F.O. buscará maximizar, la función crece indefinidamente.

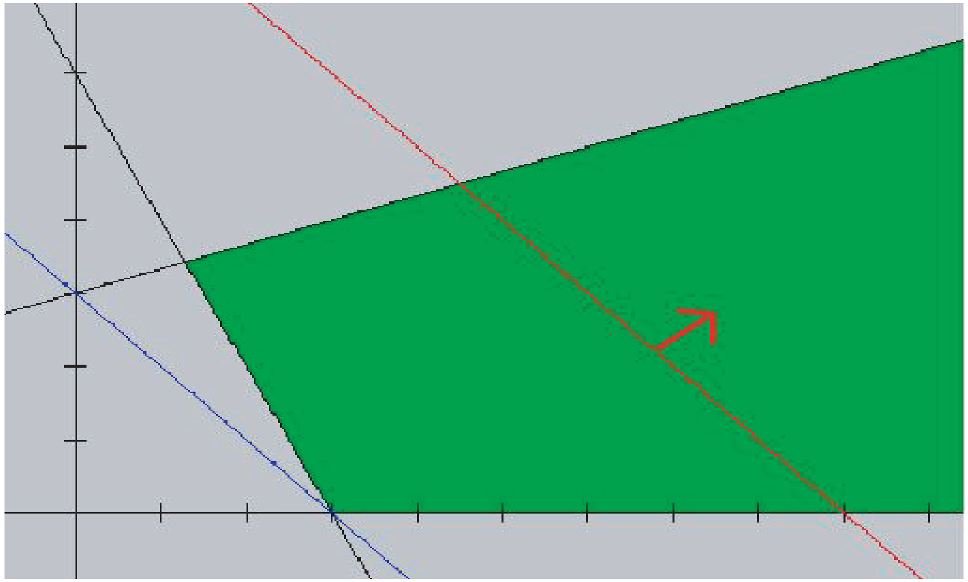
Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

b) **Problema No Acotado:**

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

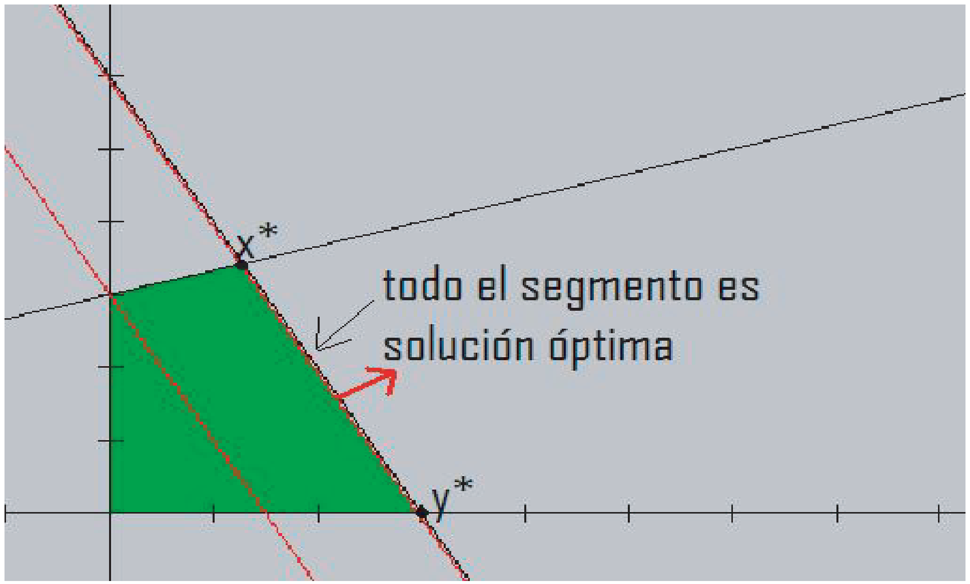


Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

4. **Problema con Infinitas Soluciones Óptimas:**

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$



Caracterización de Soluciones Óptimas

Los conceptos desarrollados en el caso no lineal son válidos para el problema lineal (recordemos que planteabamos funciones generales $f(x)$, $g_i(x)$, $h_j(x)$).

Se analizará la aplicación de los resultados generales a este caso particular.

Sea entonces el siguiente problema:

$$(\text{PL})\, \min z = c^T x$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \qquad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$.
Además, se tiene a x^* punto óptimo del problema y a z^* valor óptimo, o sea $z^* = c^T x^*$.

Dado que la función objetivo es convexa y las restricciones $Ax - b = 0$ son afines, los resultados vistos en optimización con restricciones son aplicables a este caso.

Caracterización de Soluciones Óptimas

Sea $K = \{x/Ax = b, x \geq 0\}$ el conjunto de soluciones factibles. Veamos que es un conjunto convexo:

Teorema:
Sea K el conjunto de soluciones factibles del (PL) tal que $K \neq \phi$. Entonces, K es un conjunto convexo.

Demostración: Si K contiene un sólo punto el resultado es cierto.
Supongamos entonces que existen al menos 2 soluciones factibles distintas para el (PL), x^1 y x^2. Tenemos que:

$$Ax^1 = b,\ x^1 \geq 0$$
$$Ax^2 = b,\ x^2 \geq 0$$

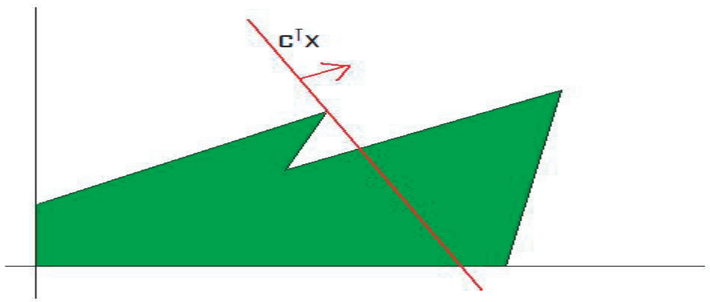
Sea $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, con $0 \leq \lambda \leq 1$, una combinación lineal convexa de x^1 y x^2.

Caracterización de Soluciones Óptimas

Entonces $x \geq 0$ y veamos que es una solución factible para el (PL).

$$\begin{aligned} Ax &= A[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] \\ &= \lambda A x^1 + (1-\lambda) A x^2 \\ &= \lambda b + (1-\lambda) b \\ &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto, todas las propiedades de los problemas convexos son aplicables al problema lineal.
En particular, si se determina un mínimo local del (PL), entonces es mínimo global.
Si K no fuera convexo, un mínimo local podría no ser global, como se ve en la figura:



El conjunto factible de esta figura no se puede caracterizar mediante un sistema de desigualdades lineales

Caracterización de Soluciones Óptimas

Estudiemos el conjunto K desde un punto de vista geométrico.

Definición:
Un conjunto formado por la intersección de un número finito de semiespacios afines se llama poliedro. Así, $K = \{x/Ax = b, x \geq 0\}$ es un poliedro.

Definición:
La **envoltura o cápsula convexa** $e(S)$ de un conjunto dado de puntos S es el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de puntos de S.

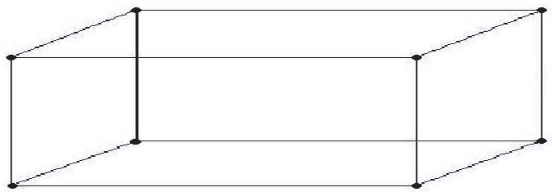
$$e(S) = \{\sum_{i \in J} \lambda_i x^i, \forall \{x^i\}_{i \in J} \subseteq S, J \text{ finito}; \sum_{i \in J} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i \in J\}$$

Equivalentemente la envoltura convexa de un conjunto es el menor conjunto convexo que lo contiene.

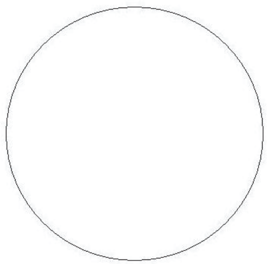
Caracterización de Soluciones Óptimas

Ej:

1. S: Conjunto de vertices de un paralepípedo.
   $e(S)$: todo el paralepípedo.

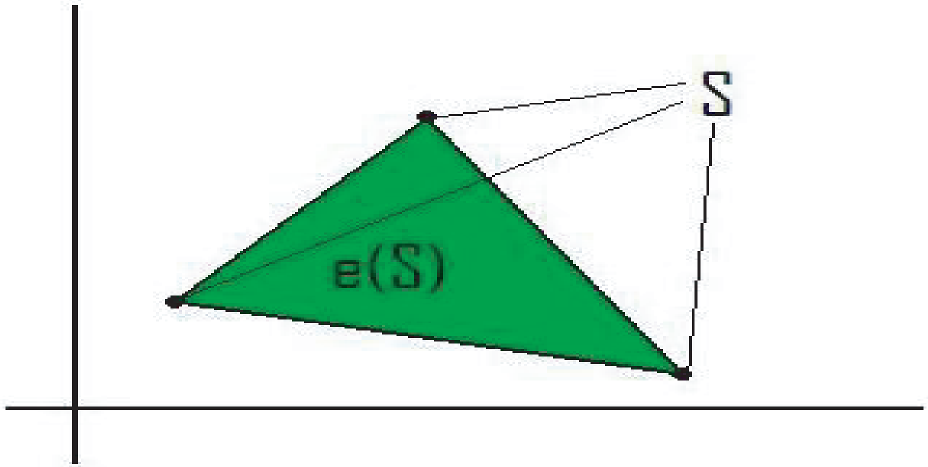


2. S: Una circunferencia.
   $e(S)$: todo el círculo.



Caracterización de Soluciones Óptimas

3.



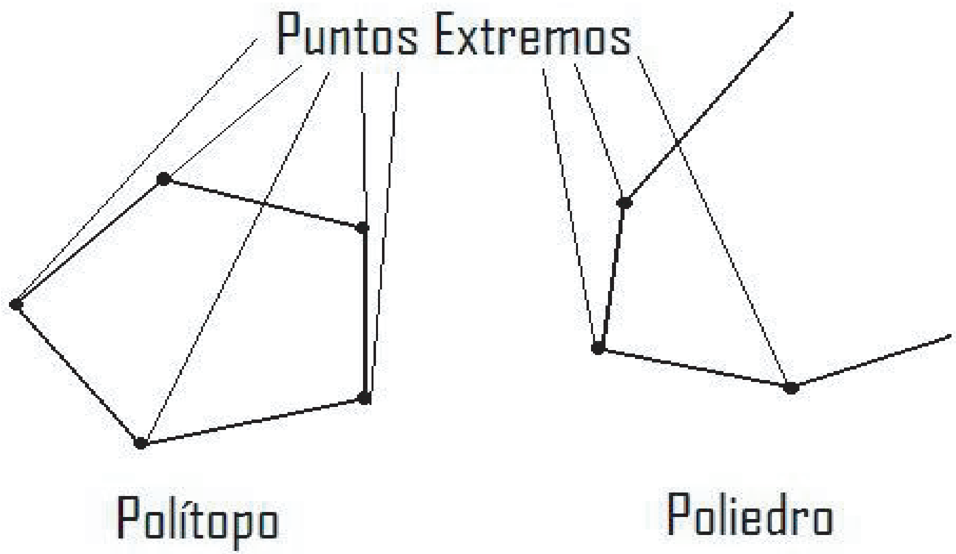
Si el conjunto S está formado por un número finito de puntos, la envoltura convexa de S se denomina polítopo.

Un conjunto convexo S se dice **no acotado** si $\forall x \in S$, existe un vector $d \neq 0$ tal que los puntos $x + \lambda d \in S$, $\forall \lambda > 0$. En caso contrario, se dice que S es acotado, esto es si existe un punto $x \in S$ tal que $\forall d \neq 0$ existe un escalar $\lambda > 0$ para el cual $x + \lambda d$ no está en S.

Caracterización de Soluciones Óptimas

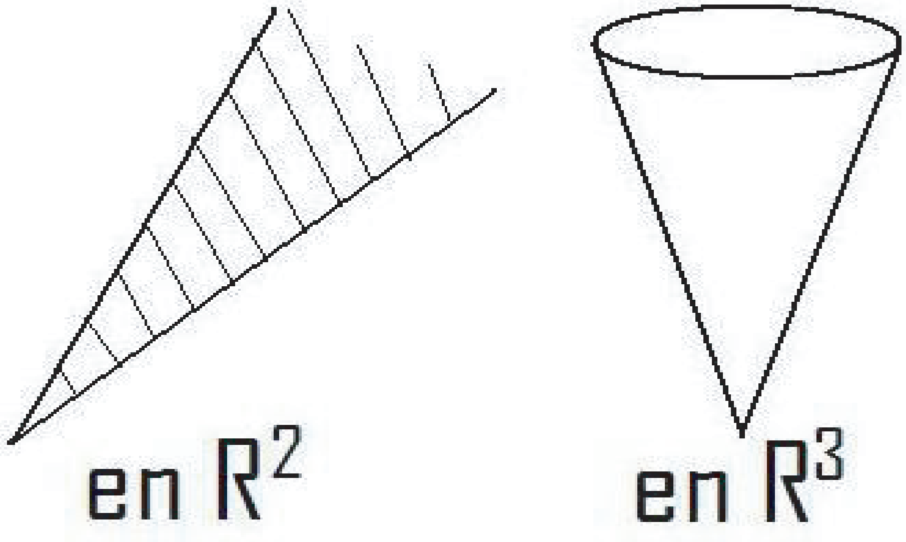
Definición:
Un punto $x \in S$ se dice **punto extremo o vértice** de S si no es posible expresar x como combinación lineal convexa de otros puntos del conjunto S. Esto es, no existen 2 puntos distintos $x^1, x^2 \in S$ tal que $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ para algún λ tal que $0 < \lambda < 1$.

$$\text{Conjunto de puntos extremos} \longrightarrow \text{Perfil de } S$$



Caracterización de Soluciones Óptimas

Definición:
Un conjunto $C \subseteq R^n$ se llama **cono** si $\forall y \in C$, se tiene que $\lambda y \in C$, $\forall \lambda \geq 0$. Si C además es convexo, se llama cono convexo.



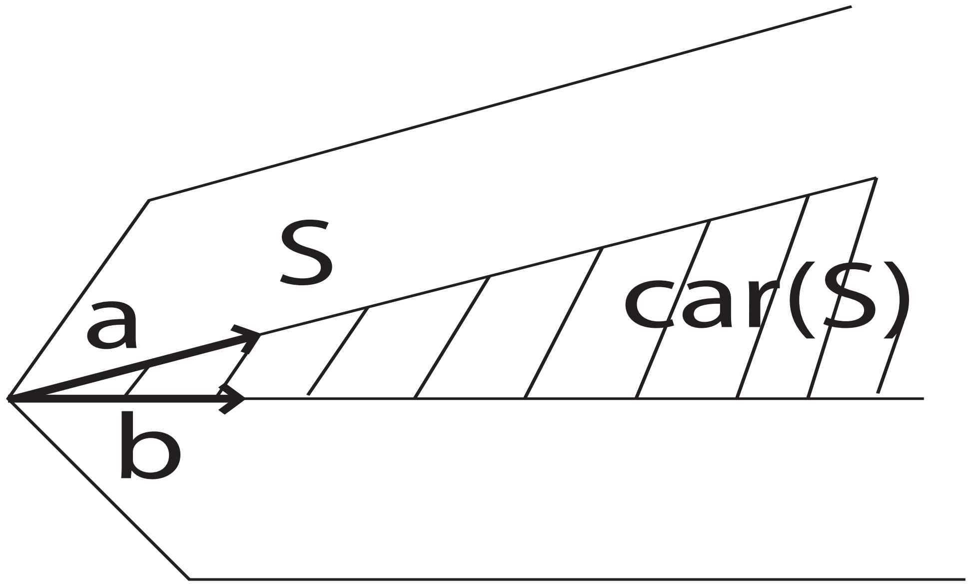
Definición:
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. El cono característico de S es el conjunto :

$$car(S) = \{y / \exists x \in S / x + \lambda y \in S, \forall \lambda \geq 0\}$$

Caracterización de Soluciones Óptimas

Definición:

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, el vector $y \in car(S)$ se llama **dirección extrema** si no es posible expresar y como combinación lineal no negativa de otros vectores del cono característico.



a y b son direcciones extremas

Caracterización de Soluciones Óptimas

Ej:

1. Si $S = \{x/Ax \leq b\}$ es un poliedro, entonces se puede mostrar que $car(S) = \{x/Ax \leq 0\}$.

2. Si $S = \{x/Ax = b, x \geq 0\}$ entonces $car(S) = \{x/Ax = 0, x \geq 0\}$

Observación:
Si S es un cono convexo, entonces su cono característico es el mismo conjunto S.

Algunos Resultados:
Proposición:
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo es acotado $\Leftrightarrow car(S) = \phi$

Algunos Resultados

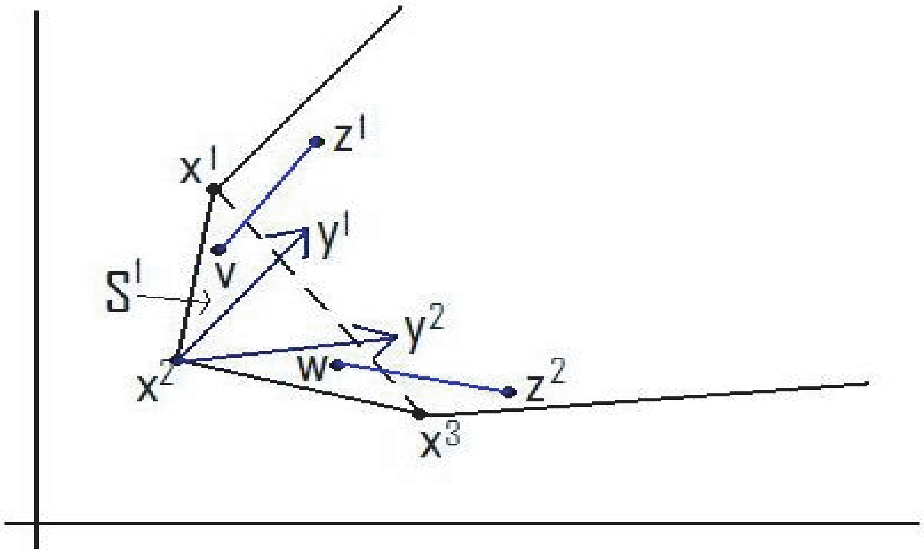
Teorema:
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Entonces $x \in S$ puede expresarse como:

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j y^j, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \mu_j \geq 0 \ \forall j$$

donde x^i, $i = 1, \ldots, p$ son puntos extremos e $y^i \in car(S)$, $j = 1, \ldots, q$ son direcciones extremas.

Esto quiere decir que todo punto de S puede expresarse como combinación convexa de un número finito de puntos extremos más una combinación cónica de direcciones extremas, esto es, como un punto perteneciente a la envoltura convexa de los puntos extremos de S más una combinación no negativa de las direcciones extremas.

Algunos Resultados



S^1: Cápsula convexa de x^1, x^2 y x^3.
y^1 e y^2: Direcciones extremas.
$z^1 = v + \mu y^1$ para algún $\mu \geq 0$.
$z^2 = w + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2$ para $\mu_1, \mu_2 \geq 0$.

Observación:
Si S es un poliedro, el teorema puede reescribirse así:
Si $x \in S = \{x/Ax \leq b\}$, entonces $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i + y$, donde $y \in car(S) = \{x/Ax \leq 0\}$ y $\{x^1, \ldots, x^p\}$ son puntos extremos de S.

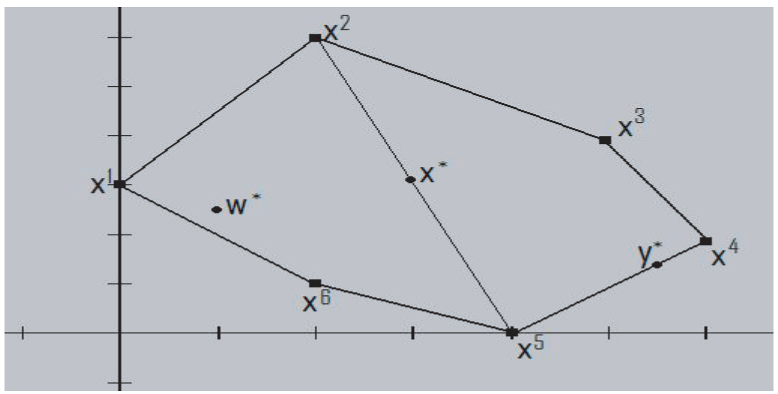
Algunos Resultados

Resultados $\longrightarrow$ sin demostración

Asumimos ahora que $car(S) = \phi$ y $\therefore S$ acotado.

Teorema:
Sea S un poliedro acotado, entonces S tiene un número finito de puntos extremos $E = \{x^1, x^2, \ldots, x^p\}$ y $S = C(E)$.
O sea, si S es un poliedro acotado cualquier punto de S se puede expresar como combinación lineal convexa de los puntos extremos de S.

Ej:



Algunos Resultados

Puntos Extremos: $E = \{x^1 = (0,3), x^2 = (2,5), x^3 = (5,4), x^4 = (6,2), x^5 = (4,0), x^6 = (2,1)\}$

$x^* = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x^i = (3, \frac{5}{2})$ con $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_6 = 0$ y $\lambda_2 = \lambda_5 = \frac{1}{2}$
$y^* = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 = (\frac{11}{2}, \frac{3}{2})$
$w^* = \frac{1}{8}x^1 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x^6 = (1, \frac{3}{4})$

Es interesante observar que basta utilizar a lo más $(n+1)$ puntos extremos para expresar un punto en $S \in \mathbb{R}^n$

Algunos Resultados

Veamos ahora un resultado inverso:

Teorema:

Sea $E = \{x^1, x^2, \ldots, x^r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de puntos. Entonces existen $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b \in \mathbb{R}^p$, para algún p tal que $C(E) = \{x / Ax \leq b\}$

$$\begin{array}{lcl} & & \{x/Ax \leq b\} \text{ representación algebraica} \\ & \nearrow & \\ \text{Poliedro} & & \\ & \searrow & C(E) \text{ representación puntual} \\ & & \text{(cápsula convexa de los extremos)} \end{array}$$

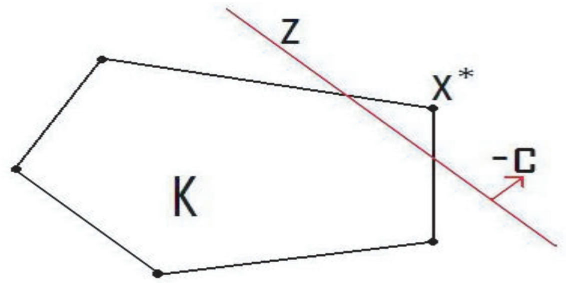
Resumiendo:

El conjunto K de soluciones factibles del (PL) es un poliedro convexo.
Si $K = \phi$ el problema es infactible.
Si no, analicemos las soluciones óptimas: Dado que el gradiente de la función es c y que el (PL) es de minimización, interesa la dirección opuesta al gradiente, o sea $-c$.

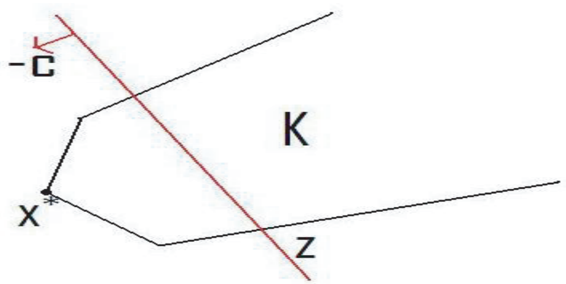
Resumiendo

Posibles Situaciones:

1. K es un polítopo convexo, x^* único óptimo y E^* finito.

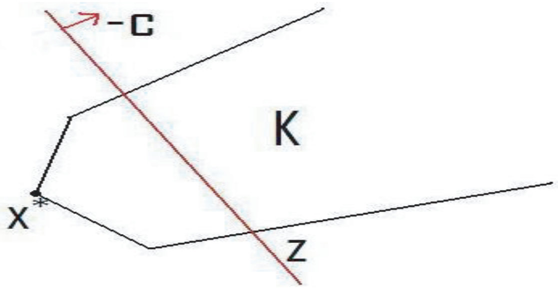


2. K poliedro convexo no acotado, x^* único óptimo, z^* acotado

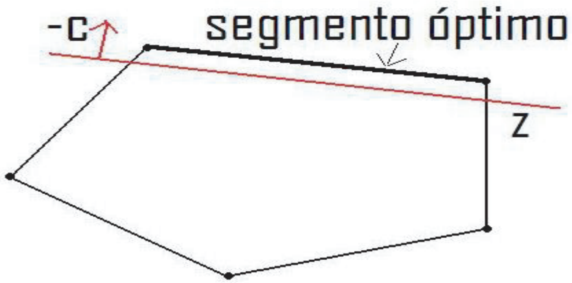


Resumiendo

3. K poliedro convexo no acotado, z puede decrecer indefinidamente ($z \longrightarrow -\infty$). Problema no acotado



4. Si existe más de un punto óptimo con valor óptimo finito, entonces existen infinitos puntos óptimos



Caracterización de Soluciones Óptimas

Teorema:
Si el (PL) admite solución óptima finita, entonces el valor óptimo se alcanza en un punto extremo del poliedro factible K.
Si el valor óptimo se alcanza en más de un punto extremo de K, entonces este mismo valor se obtiene para cualquier punto que sea combinación lineal convexa de estos puntos extremos.

Demostración:
Sea x^* solución óptima del (PL). Sabemos que $c^T y \geq 0$, $\forall y \in car(K)$ (recordemos que $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$, $\forall d$ dirección factible).
Recordemos que x^* puede expresarse como:

$$x^* = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j y^j \text{ con } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

x^i, $i = 1, \ldots, p$ puntos extremos de K, $\lambda_i \geq 0$, $\mu_j \geq 0$, $y^j \in car(K)$

Caracterización de Soluciones Óptimas

Si no hubiera óptimo en un extremo, entonces $c^T x^i > c^T x^* = z^*$, $\forall i = 1, \ldots, p$
Por lo tanto:

$$z^* = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c^T x^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j c^T y^j$$

Luego, como $\sum_{j=1}^{q} \mu_j c^T y^j \geq 0$, se tiene que:

$$z^* \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c^T x^i > \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c^T x^* = z^*$$

Entonces: $c^T x^i = z^*$ para algún i.
Si x^j con $j \neq i$ también es óptimo $\Rightarrow c^T x^j = z^*$.
Sea $x = \lambda x^i + (1 - \lambda) x^j$

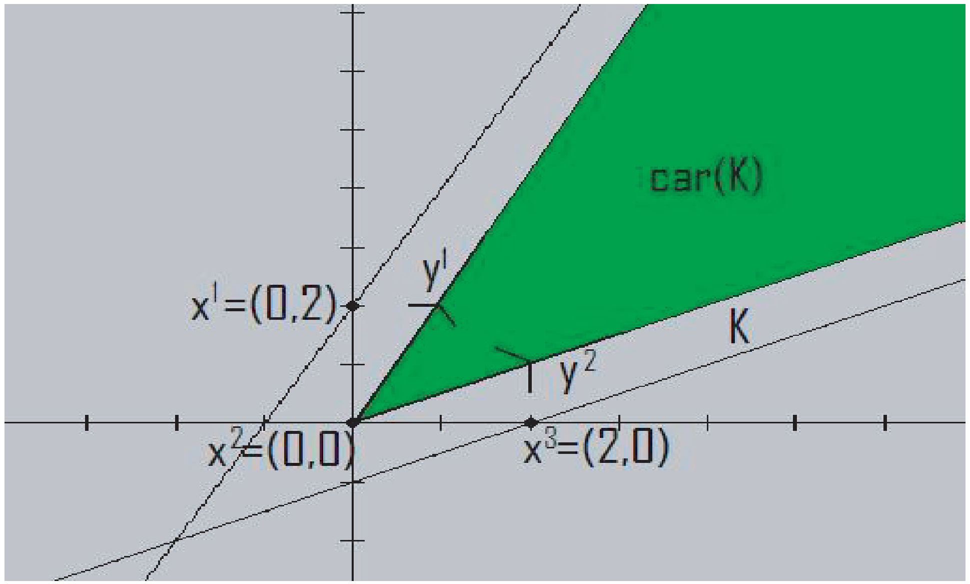
$$\Rightarrow c^T x = \lambda c^T x^i + (1 - \lambda) c^T x^j = \lambda z^* + (1 - \lambda) z^* = z^*$$

$$\forall x \text{ combinación lineal convexa de } x^i \text{ y } x^j$$

Caracterización de Soluciones Óptimas

Ej:

$$
\begin{aligned}
\max z &= -4x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a.} \quad x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\
-2x_1 + x_2 &\leq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



x^1, x^2, x^3 son puntos extremos.
Direcciones extremas: $y^1 = (2,1)$, $y^2 = (1,2)$

Caracterización de Soluciones Óptimas

Todo $x \in K$ se puede escribir como:

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2$$

$$\sum \lambda_i = 1 \qquad \lambda_i \geq 0 \qquad \mu_j \geq 0$$

El óptimo se alcanza en x^1, pero también en todo los puntos del rayo en la dirección y^1 que comienza en x^1.

Luego el problema posee infinitas soluciones:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}^T \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 + 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= -4\alpha + 4 + 4\alpha = 4 \quad \forall \alpha \geq 0$$

Algoritmo Simplex

Diseñado por Dantzig en la década del 40 para resolver problemas lineales.

Es el algoritmo más famoso para este tipo de problemas.

Dado que el óptimo del problema se puede encontrar en un punto extremo, lo que hace el algoritmo es moverse de extremo a extremo siempre que mejore la función objetivo.

El criterio de detención será verificar las condiciones de KKT o encontrar una dirección extrema que muestre que el problema no es acotado.

Forma Estándar de un (PL)

$$\begin{aligned} (\mathrm{PL})\, \text{mín} \quad & z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Algoritmo Simplex

Veamos primero que todo problema de programación lineal puede expresarse así:

1. Si la F.O. es $\max z = c^T x$, se transforma en $\min -c^T x$ y luego se multiplica el resultado final por -1.

2. Si las restricciones son de desigualdad se agregan variables de holgura:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$\downarrow$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$
$$\text{con } x_{n+i} \geq 0$$

Si se tiene $\geq$ se realiza lo siguiente:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$
$$\Rightarrow a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$$
$$\text{con } x_{n+i} \geq 0$$

Algoritmo Simplex

3. Variables no positivas e irrestrictas pueden reemplazarse por no negativas:

- Si tengo $x_k \leq 0$, se reemplaza por $-x_k \geq 0$.
- Si tengo x_k irrestricta, se reemplaza por:

$$x_k = x'_k - x''_k \text{ con } x'_k, x''_k \geq 0$$

Si resolvemos el nuevo problema estándar, puedo obtener la solución del problema original por sustitución hacia atrás de las modificaciones efectuadas.

Ejercicio:
Pasar a la forma estándar el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & z = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

Soluciones Básicas Factibles

Recordemos que si un (PL) admite solución óptima, entonces existe algún punto extremo que es óptimo.

Luego, resolver el (PL) es equivalente a determinar el punto extremo de mejor valor.

Introducimos ahora el concepto de solución básica factible y mostramos como caracterizar los puntos extremos del poliedro factible en términos de estas soluciones básicas factibles.

Veamos:
Sea el sistema $Ax = b, x \geq 0$ con $A \in R^{m \times n}$, $x \in R^n$ y $b \in R^m$. Se asume $rg(A) = m$ (si $rg(A) < m$ elimino las filas redundantes).
Denotemos:
$A_{\cdot j} \longrightarrow$ La columna j de la matriz.
$A_{i\cdot} \longrightarrow$ La fila i de la matriz.
$a_{ij} \longrightarrow$ Coeficiente de la fila i, columna j de A.
$Ax = b \longrightarrow A_{\cdot 1}x_1 + \cdots + A_{\cdot n}x_n = b$, $x_j \geq 0$.

Soluciones Básicas Factibles

$rg(A) = m \Rightarrow$ hay m columnas linealmente independientes.

Sea B la submatriz de A formada por estas m columnas.

Reordenemos las columnas de A de modo que $A' = [B|R]$, R matriz residual formada por las $n - m$ columnas que no están en B.

Reordenemos también el vector x que se transforma en $x' = [x_B|x_R]^T$. Entonces:

$$Ax = b \Leftrightarrow [B|R][x_B|x_R]^T = b$$

$$\Rightarrow Bx_B + Rx_R = b$$

Como las columnas de B son l.i. $\Rightarrow B$ es invertible.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{B^{-1}B}_{I} \quad x_B + \quad \underbrace{B^{-1}R}_{\overline{R}} \quad x_R = \quad \underbrace{B^{-1}b}_{\overline{b}}$$

$$Ix_B + \overline{R}x_R = \overline{b}$$

Soluciones Básicas Factibles

La solución es $x = [x_B, x_R]$, con:
$x_B = \overline{b} = B^{-1}b$
$x_R = 0$

Esta solución se denomina **solución básica** (está asociada a una base de los vectores columna de la matriz A).

Si además $x_b \geq 0 \Rightarrow x_b$ es **solución básica factible** puesto que satisface todas las restricciones del (P.L.) ($Ax = b$, $x \geq 0$).

Componentes de $x_B \longrightarrow$ variables básicas.
Componentes de $x_R \longrightarrow$ variables no básicas.

Para que una solución básica sea factible se necesita que $\overline{b} \geq 0$.

Una matriz básica B tal que $B^{-1}b$ es no negativo, se dice **matriz primal factible**.

Soluciones Básicas Factibles

Ej: Problema original:

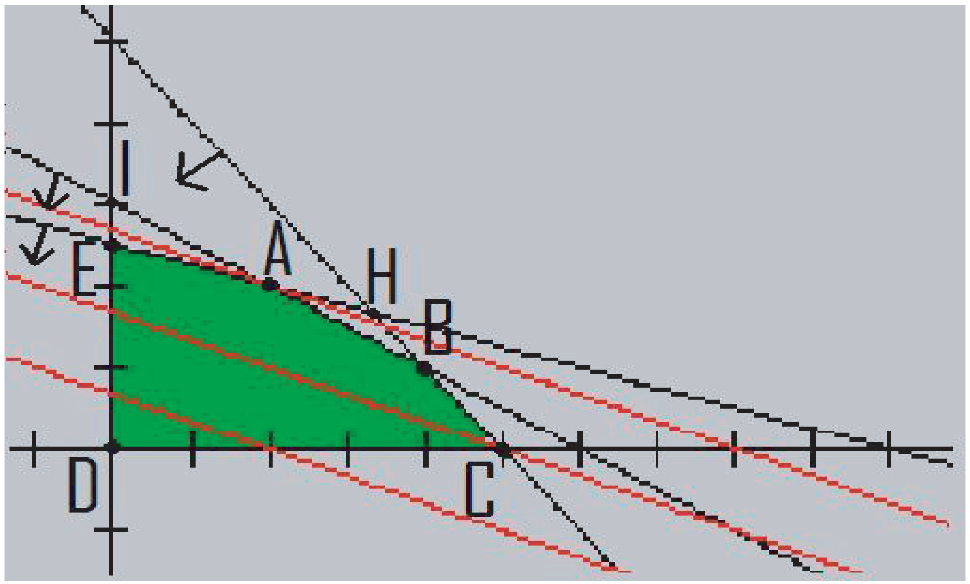
$$\begin{array}{ll} \max z = & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Problema equivalente:

$$\begin{array}{lllllll} \min z = & -x_1 & -3x_2 & & & & \\ \text{s.a.} & x_1 & +4x_2 & +x_3 & & & = 100 \\ & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 60 \\ & x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 50 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Soluciones Básicas Factibles

$$A = [A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 3}, A_{\cdot 4}, A_{\cdot 5}]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Soluciones Básicas Factibles

Cuántas bases distintas $B^{-1}b$ podemos generar como máximo?

$$\binom{5}{3} = 10$$

Bases Factibles:

$$B = [A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 5}] \longrightarrow x_B = (x_1, x_2, x_5) = (20, 20, 10)$$

$$x_B = (x_1, x_2, x_3) = (40, 10, 20)$$
$$x_B = (x_1, x_3, x_4) = (50, 50, 10)$$
$$x_B = (x_3, x_4, x_5) = (100, 60, 50)$$
$$x_B = (x_2, x_4, x_5) = (25, 10, 25)$$

Soluciones Básicas Factibles

Bases Infactibles:

$$x_B = (x_2, x_3, x_5) = (30, -20, 20)$$
$$x_B = (x_2, x_3, x_4) = (50, -100, -40)$$
$$x_B = (x_1, x_2, x_4) = (\frac{100}{3}, \frac{50}{3}, -\frac{20}{3})$$
$$x_B = (x_1, x_4, x_5) = (100, -40, -50)$$
$$x_B = (x_1, x_3, x_3) = (60, 40, -10)$$

Número de Soluciones Básicas (si el rango es m) $\leq \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Por ejemplo, si $n = 100$ y $m = 60$

$$\left(\begin{array}{c} 100 \\ 60 \end{array} \right) \approx 1,37 \cdot 10^{28}$$

No parece eficiente tratar de enumerar todas las soluciones básicas.

Soluciones Básicas Factibles

Teorema:
Un punto $\overline{x} \in K$ es solución básica factible $\Leftrightarrow \overline{x}$ es punto extremo del poliedro factible K.

Demostración:
Supongamos sin perdida de generalidad que $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m, 0, \ldots, 0)$ es una solución básica factible. Entonces:

$$\overline{x}_1 A_{\cdot 1} + \cdots + \overline{x}_m A_{\cdot m} = b$$

Donde $A_{\cdot 1}, \ldots, A_{\cdot m}$ son m columnas linealmente independientes.
Supongamos que $\overline{x}$ no es punto extremo, entonces $\overline{x}$ se escribe como combinación lineal convexa de otros 2 puntos factibles distintos, esto es:

$$\overline{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\Rightarrow \overline{x}_j = \lambda x_j^1 + (1-\lambda)x_j^2, \quad j = 1, \ldots, m$$
$$0 = \lambda x_j^1 + (1-\lambda)x_j^2, \quad j = m+1, \ldots, n$$

Soluciones Básicas Factibles

Como x^1 y x^2 son factibles, sus componentes son todas ≥ 0.

$$\Rightarrow x_j^1 = x_j^2 = 0, \quad j = m+1, \ldots, n$$

Además, x^1 y x^2 son factibles, así que satisfacen $Ax = b$, $x \geq 0$.

$$\Rightarrow \text{ satisfacen } x_1 A_{\cdot 1} + \ldots + x_m A_{\cdot m} = b$$

Dado que $A_{\cdot 1}, \ldots, A_{\cdot m}$ son l.i.

$$\Rightarrow \text{ el sistema tiene solución única}$$

$$\Rightarrow x^1 = x^2 = \overline{x}, \text{ contradiciendo la hipótesis}$$

Así: $\overline{x}$ es punto extremo.

Soluciones Básicas Factibles

Recíprocamente: Supongamos que $\overline{x}$ es punto extremo de K y que solo las primeras k $(k \geq 1)$ componentes de $\overline{x}$ son $\neq 0$ (si $\overline{x} = 0$ es fácil ver que es solución básica factible). Entonces:

$$\overline{x}_1 A_{.1} + \cdots + \overline{x}_k A_{.k} = b \text{ con } \overline{x}_i \neq 0 \quad i = 1, \ldots, k \tag{1}$$

Si los vectores $A_{.1}, \ldots, A_{.k}$ son l.i., listo (si k=m, ya tenemos la base B; si no, se puede demostrar que se pueden extender estas columnas a una base B).

$$\Rightarrow \overline{x} \text{ es solución básica factible}$$

Supongamos que no:
Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ no todos nulos tal que

$$\alpha_1 A_{.1} + \cdots + \alpha_k A_{.k} = 0 \tag{2}$$

Multiplicando (2) por $\theta > 0$ y sumando con (1) se tiene:

$$(\overline{x}_1 + \theta\alpha_1) A_{.1} + \cdots + (\overline{x}_k + \theta\alpha_k) A_{.k} = b$$

Soluciones Básicas Factibles

Si ahora se tiene (1) - θ (2), queda

$$(\overline{x}_1 - \theta\alpha_1)A_{.1} + \cdots + (\overline{x}_k - \theta\alpha_k)A_{.k} = b$$

Así tenemos 2 soluciones x^1 y x^2 de $Ax = b$, con

$$x^1 = (\overline{x}_1 + \theta\alpha_1, \ldots, \overline{x}_k + \theta\alpha_k, 0, \ldots, 0)$$

$$x^2 = (\overline{x}_1 - \theta\alpha_1, \ldots, \overline{x}_k - \theta\alpha_k, 0, \ldots, 0)$$

Para que sean x^1 y x^2 factibles necesitamos que todas sus componentes sean ≥ 0.
Pero $\overline{x}_j$ es > 0 , entonces puedo elegir $\theta > 0$ tan pequeño como sea necesario de modo que eso ocurra, así θ debe ser tal que $0 < \theta < \overline{\theta}$ con $\overline{\theta} = \min\{\theta_1, \theta_2\}, \quad \theta_1 = \min_{\alpha_j < 0}\{-\frac{\overline{x}_j}{\alpha_j}\}$ y $\theta_2 = \min_{\alpha_j > 0}\{\frac{\overline{x}_j}{\alpha_j}\}$
Entonces:

$$\overline{x} = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \text{ con } x^1 \text{ y } x^2 \text{ factibles, } x^1 \neq \overline{x}, x^2 \neq \overline{x}$$

Contradiciendo la hipótesis de que $\overline{x}$ es punto extremo (o sea no se puede escribir como combinación lineal convexa de otros 2 puntos de K).

Generación de Puntos Extremos

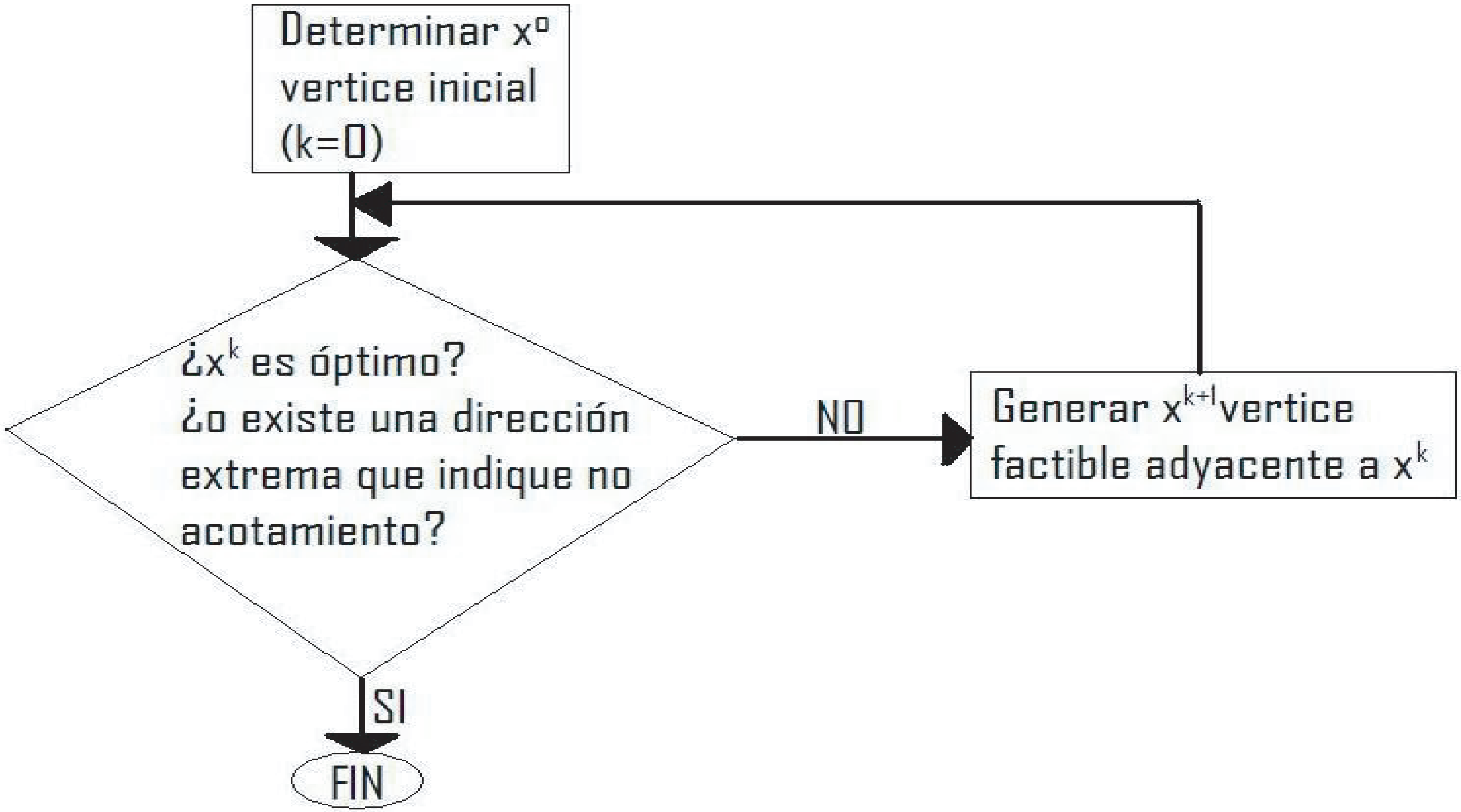
El algoritmo **Simplex** examina vértices del poliedro factible, o sea determina soluciones básicas factibles.

Si un vértice dado K no es óptimo, entonces se genera un nuevo vértice factible **adyacente** al actual.

Se repite esta idea hasta encontrar un vértice óptimo o detectar una dirección extrema que indique que el problema es no acotado.

Generación de Puntos Extremos

Esquema General del Algoritmo:



Generación de Puntos Extremos

Geométricamente, dos puntos extremos del poliedro factible son adyacentes si el segmento de recta que los une corresponde a una arista de K.

Esto es equivalente a la siguiente definición (que establece que las bases asociadas a puntos extremos adyacentes difieren sólo en un vector).

Definición:
Dos puntos extremos del poliedro factible K x^1 y x^2 son adyacentes ssi:

$$rango(\{A_{\cdot j}/x_j^1 > 0 \vee x_j^2 > 0\}) = |\{A_{\cdot j}/x_j^1 > 0 \vee x_j^2 > 0\}| - 1$$

Entonces:
Modificar la solución básica factible asociada a un vértice x^k de K para obtener la solución asociada a un vértice adyacente a x^k es equivalente a modificar la matriz básica asociada a x^k, donde la nueva matriz básica difiere de la primera en sólo un vector columna.

Generación de Puntos Extremos

Mostraremos cómo se efectúa este cambio de base en el simplex y probaremos que los criterios utilizados para modificar una base factible permiten generar puntos extremos factibles adyacentes.

$$\begin{aligned} (\mathrm{PL})\ \min z &= c^T x \\ \text{s.a.} \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Asumimos que tenemos una base B primal factible asociada al vértice x ($A = [B|R]$). Recordemos que:

$$Ix_B + \overline{R}x_R = \overline{b}, \text{ donde } \overline{R} = B^{-1}R, \overline{b} = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R$$

Luego

$$\begin{aligned} z &= c_B^T x_B + c_R^T x_R \\ z &= c_B^T(\overline{b} - \overline{R}x_R) + c_R^T x_R \\ z &= c_B^T \overline{b} + (c_R - \overline{R}c_B)^T x_R \end{aligned}$$

Generación de Puntos Extremos

Llamamos entonces $\overline{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R$ (vector de costos reducidos no básicos).

Definimos al vector de multiplicadores del simplex como $\pi = c_B^T B^{-1} \Rightarrow \overline{c}_R^T = c_R^T - \pi R$.

Observación: Los costos reducidos de las variables básicas son nulos (por definición: $\overline{c}_B^T = c_B^T - \pi B$).

Con este desarrollo nos queda la siguiente forma del (PL) asociada a una base B (forma canónica):

$$\begin{aligned} \min z &= c_B^T \overline{b} + \overline{c}_R^T x_R \\ \text{s.a.} \quad & I x_B + \overline{R} x_R = \overline{b} \\ & x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

Donde $\overline{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R$
$\overline{b} = B^{-1} b$
$\overline{R} = B^{-1} R$

Generación de Puntos Extremos

Notación:

- $\overline{c}_j$: Componentes de $\overline{c}_R$.
- $\overline{b}_i$: Componentes de $\overline{b}$.
- $\overline{A}_{\cdot j}$: Columnas de $\overline{R}$.
- $\overline{A}_{i\cdot}$: Filas de $\overline{R}$.
- $\overline{a}_{ij}$: Coeficientes de $\overline{R}$.

Supongamos sin perdida de generalidad que la base B está formada por las m primeras columnas de la matriz A.

$$B = [A_{\cdot 1}, \ldots, A_{\cdot m}] \text{ y } R = [A_{\cdot m+1}, \ldots, A_{\cdot n}]$$

Generación de Puntos Extremos

J_B: Conjunto de índices de las columnas básicas.
J_R: Conjunto de índices de las columnas no básicas.
En este caso $J_B = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $J_R = \{m+1, \ldots, n\}$

La solución básica factible correspondiente a esta base es $x_R = 0$ y $x_B = \bar{b}$, lo que implica que el valor de la función objetivo es:

$$z = c_B^T \bar{b}$$

Cómo saber si esta solución es óptima?
Examinaremos la función objetivo para determinar si es posible disminuir su valor modificando el valor de las variables no básicas.

Para pasar a un vértice adyacente, se puede modificar sólo el valor de una variable no básica.

Tenemos:

$$z = c_B^T \bar{b} + \sum_{j \in J_R} \bar{c}_j x_j$$

Generación de Puntos Extremos

Sea x_k (con $k \in J_R$) la variable no básica a la que se desea aumentar su valor en la próxima solución.
Si $\overline{c}_k > 0 \Rightarrow z$ crece $\longrightarrow$ no nos conviene.

Criterio de Optimalidad:
Si una solución básica factible es tal que $\overline{c}_j \geq 0 \quad \forall j \in J_R \Rightarrow$ La solución es óptima.
(La base correspondiente se llama base óptima.)

Observación: Se puede probar que esta condición corresponde a la condición de suficiencia de Karush-Kuhn-Tucker, vista en programación no lineal.

Cómo obtenemos una nueva solución básica factible si no se cumple el criterio de optimalidad?

Aumentemos el valor de la variable no básica seleccionada (con $\overline{c}_k < 0$), hasta que alguna de las variables básicas se haga nula.

Generación de Puntos Extremos

Sea x_s la variable escogida para aumentar de valor. El cambio de base consistirá en ingresar a la base la columna asociada a x_s y sacar de la base la columna de la primera variable que se hace nula cuando x_s crece.

Criterio de Entrada a la Base:
Tomaremos $\bar{c}_s = \min_{\bar{c}_j < 0} \{\bar{c}_j\}$

Así $A_{\cdot s}$ es la columna que entra a la base. (smallest reduced cost o menor costo reducido).

Observación: La función objetivo disminuye al seleccionar **cualquier** variable de costo reducido negativo.

Generación de Puntos Extremos

Criterio de Salida de la Base:
Para determinar cuál es la primera variable que se hace nula cuando x_s crece es necesario analizar las restricciones en la forma canónica

$$Ix_B + \overline{R}x_R = \bar{b}$$

$$\Leftrightarrow Ix_B + \overline{A}_{\cdot m+1}x_{m+1} + \ldots + \overline{A}_{\cdot s}x_s + \ldots + \overline{A}_{\cdot n}x_n = \bar{b}$$

, donde x_s es la única variable no básica actual que dejará de ser nula.

$$\Leftrightarrow Ix_B + \overline{A}_{\cdot s}x_s = \bar{b}$$

$$\Leftrightarrow x_i + \overline{a}_{is}x_s = \bar{b}_i \quad i = 1, \ldots, m$$

Si $\overline{a}_{is} \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$, entonces x_s puede crecer indefinidamente (pues x_i también aumenta su valor, o sea no puede hacerse negativo), con la cual el valor de la función objetivo z decrece indefinidamente.

$$\therefore \text{ problema no acotado}$$

Generación de Puntos Extremos

Si $\overline{a}_{is} > 0$ para algún i, cuando x_s aumenta su valor, la variable x_i disminuye. Hasta cuánto puede disminuir?

Sea $\theta_i = \frac{\bar{b}_i}{\overline{a}_{is}} \geq 0$.

Cuando x_s es igual a θ_i, x_i debe tomar valor 0.
Si x_s fuera mayor que θ_i, x_i tomaría valores negativos, conduciendo a un punto infactible.
Luego el máximo valor que la restricción i-ésima le permite tomar a la variable x_s es θ_i.

Considerando las m restricciones, el máximo valor que puede tomar x_s es

$$\min_{\overline{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

Supongamos que este mínimo se verifica para $\frac{\bar{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \Rightarrow x_s = \frac{\bar{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$ y $x_r = 0$.
O sea, x_s entra a la base y x_r sale de la base, o, lo que es lo mismo, la columna $A_{\cdot s}$ reemplaza en la nueva base B, en la misma posición, a la columna $A_{\cdot r}$.

Generación de Puntos Extremos

La nueva base será:

$$[A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, \ldots, \quad \underset{\substack{\downarrow \\ r\text{-ésima posición}}}{A_{\cdot s}}, \ldots, A_{\cdot m}]$$

Ej: (Clase Auxiliar)

Veamos que el cambio de base realizado por el algoritmo SIMPLEX corresponde a generar vértices adyacentes.

Dos vértices x^1 y x^2 son adyacentes $\Leftrightarrow rango(\{A_{\cdot j}/x_j^1 > 0 \vee x_j^2 > 0\}) = |\{A_{\cdot j}/x_j^1 > 0 \vee x_j^2 > 0\}| - 1$.

Teorema:
Sea B una base primal factible. Si en el punto extremo x^1 correspondiente a B todas las variables básicas son > 0, entonces el cambio de base efectuado por el SIMPLEX genera otro punto que es adyacente a x^1.

Generación de Puntos Extremos

Demostración:
Sea B una base primal factible. Asumimos que B está formada por las primeras m columnas de la matriz A y $rg(A) = m$

$$B = [A_{\cdot 1}, \ldots, A_{\cdot m}]$$

El vértice x^1 es tal que

$$x_B^1 = (x_1^1, \ldots, x_m^1) = B^{-1}b \text{ y } x_{m+1}^1 = \cdots = x_n^1 = 0$$

Supongamos también que entra, tras el cambio de base, la columna $A_{\cdot m+1}$ y sale $A_{\cdot 1}$. Así , la nueva base es $B' = [A_{\cdot 2}, \ldots, A_{\cdot m}, A_{\cdot m+1}]$ que corresponde al vértice x'.

Si la columna que sale es $A_{\cdot 1}$, significa que el valor que puede tomar x'_{m+1} es $\frac{\overline{b}_1}{\overline{a}_{1,m+1}}$

Sea $\theta = \frac{\overline{b}_1}{\overline{a}_{1,m+1}}$. Entonces:

$$x'_i = \overline{b}_i - \theta \overline{a}_{1,m+1} \quad i = 1, \ldots, m$$

Generación de Puntos Extremos

$$\Rightarrow x'_1 = 0 \text{ y } x'_i \geq 0 \quad \forall i = 2, \ldots, m+1$$

Luego, en el punto extremo x' las variables asumen valores x'_j tal que $x'_2, x'_3, \ldots, x'_m \geq 0$, $x'_{m+1} > 0$ y $x'_1 = x'_{m+2} = \cdots = x'_n = 0$.

El conjunto de columnas $A_{\cdot j}$ tal que $x^1_j > 0$ o $x'_j > 0$ es $\{A_{\cdot 1}, \ldots, A_{\cdot m+1}\}$.

Como $rg(A) = m$ y sabíamos que las primeras m columnas de A ya tenían rango m, al agregar $A_{\cdot m+1}$, este conjunto de $m+1$ columnas tiene rango m

$$\Rightarrow x^1 \text{ y } x' \text{ son adyacentes}$$

Algoritmo Simplex

Vamos a analizar que pasa con el algoritmo cuando se presentan 2 situaciones que hemos visto con anterioridad.

1. Problema no acotado

2. Problema con más de un óptimo

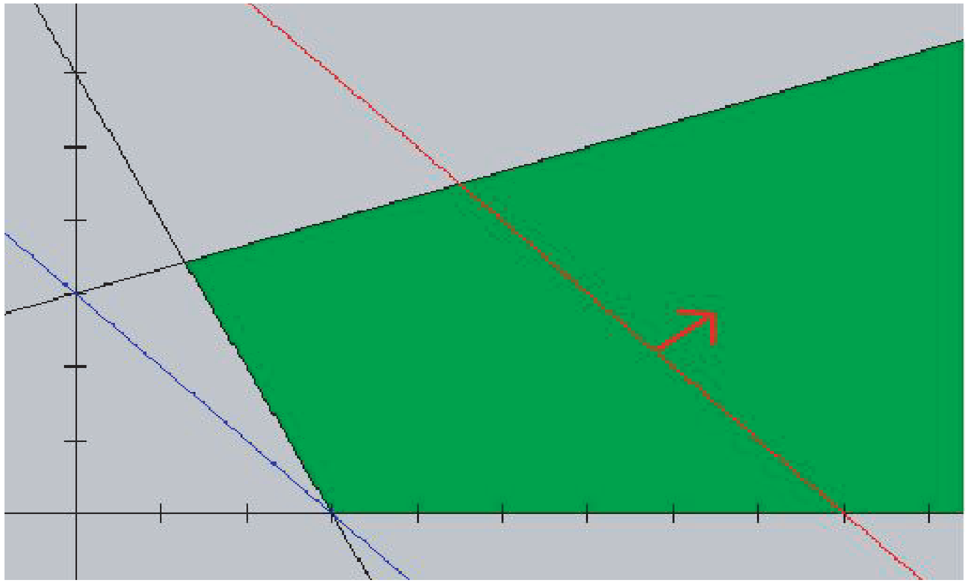
1. **Problema No Acotado:**
   Ej:

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Algoritmo Simplex



La forma estándar es:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\text{mín } z = & -2x_1 & - & 2x_2 & & & & & & \\
\text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 9 \\
& 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 6
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Algoritmo Simplex

Consideremos la base $B = [A_{\cdot 3}, A_{\cdot 1}]$, entonces

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \Leftrightarrow\ & [B|R][x_B|x_R] = b \\ \Leftrightarrow\ & Bx_B + Rx_R = b \\ \Leftrightarrow\ & Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b \end{aligned}$$

Si ordenamos y multiplicamos por B^{-1} nos queda

$$\begin{array}{cccccccc} x_3 & & + & \frac{7}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_4 & = & 12 \\ & x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_4 & = & 3 \end{array}$$

La solución básica factible es

$$x_B = (x_3 = 12, x_1 = 3) \qquad x_R = (x_2 = 0, x_4 = 0)$$

Algoritmo Simplex

Los costos reducidos no básicos son:

$$\overline{c}_R^T = c_R^T - \pi R$$

Con $\pi = c_B^T B^{-1} = (0 \quad -2) \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (0 \quad -1)$

Entonces

$$\bar{c}_2 = c_2 - \pi A._2 = -2 - (0 \quad -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\bar{c}_4 = c_4 - \pi A._4 = 0 - (0 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

Observar que $\overline{c}_4$ es < 0 y los coeficientes de la columna asociada a x_4 son todos ≤ 0 ($\overline{a}_{i4} \leq 0 \quad \forall i$).

Luego x_4 puede crecer indefinidamente, y a la par crecen x_1 y x_3. Si x_1 crece indefinidamente, la función decrece indefinidamente.

$$\Rightarrow \text{ problema no acotado}$$

Algoritmo Simplex

2. **Problema con Muchos Óptimos:**
Recordemos que $z = c_B^T \overline{b} + \overline{c}_R^T x_R$

En una solución básica $(x_B, x_R) = (\bar{b}, 0)$, tenemos que $z = c_B^T \overline{b}$

Si $\overline{c}_j \geq 0 \quad \forall j$, entonces la solución es óptima (criterio de optimalidad).

Veamos que los $\overline{c}_j$ en un punto extremo nos dan información sobre si el óptimo es único:
Sea x^* un óptimo (solución básica factible) y z^* el valor óptimo

$$z^* = c_B^T \overline{b} + \overline{c}_R^T x_R^*$$

Si $\overline{c}_k = 0$ para alguna variable no básica x_k, entonces x_k puede crecer mientras se mantenga la factibilidad y el valor de la función objetivo no cambia.

Por lo tanto, si en el óptimo existe al menos una variable no básica con costo reducido nulo (y que tiene rango factible para crecer), el problema admite puntos óptimos alternativos.

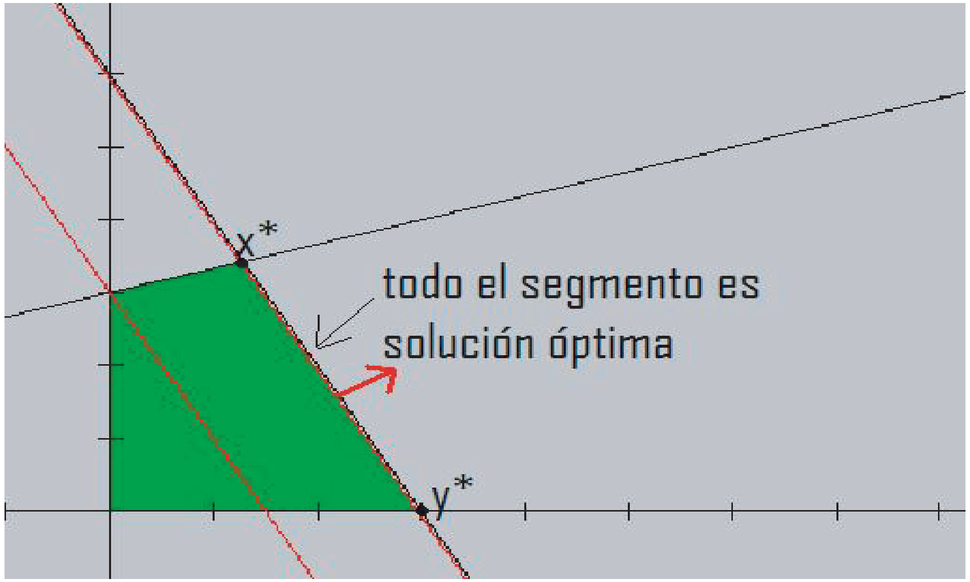
Algoritmo Simplex

Ej:

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Algoritmo Simplex

En forma estándar:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{mín}\, z = & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & \\ \text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Si aplicamos el SIMPLEX, llegamos a que la base óptima es:

$$B^* = [A_{\cdot 3}, A_{\cdot 1}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \left(B^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$$

Luego las variables básicas son $x_3^* = 12$, $x_1^* = 3$ y las no básicas $x_2^* = x_4^* = 0$.

Analicemos los costos reducidos no básicos:
El vector π de multiplicadores del SIMPLEX es $(0 \quad -1)$, con esto

$$\overline{c}_2 = c_2 - \pi A_{\cdot 2} = 0$$

$$\overline{c}_4 = c_4 - \pi A_{\cdot 4} = 1$$

Algoritmo Simplex

Luego si x_2 crece la función objetivo no cambia.

Hasta cuándo puede crecer x_2?
Analicemos la cuenta con el desarrollo ya visto: se puede ver que x_2 puede crecer hasta

$$\min\left\{\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}},\frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{32}}\right\}=\frac{24}{7}\ ,$$

manteniendo factibilidad.

Podemos también obtener otro vértice óptimo haciendo el cambio de base del SIMPLEX, haciendo ingresar la columna correcta x_2 a la base.

Haciendo las cuentas queda que sale de la base x_3 y:

$$x_1^*=\frac{9}{7},x_2^*=\frac{24}{7}$$

$$x_3^*=x_4^*=0$$

Que corresponde al punto x^* del dibujo.

Resumen del Algoritmo Simplex

Consta de 2 fases: una de **inicialización** (fase I) y otra de **optimización** (fase II)

Inicialización:
Consiste en determinar un vértice inicial factible.

Optimización:
Verifica si el vértice actual es óptimo. Si es óptimo, termina. Si no, busca un vértice factible adyacente al actual tal que la función objetivo no aumente.

Pasos del Algoritmo:
$0.$ Determinar un vértice factible inicial. Esto significa determinar una base B primal factible.

1. Determinar B^{-1}, inversa de la base.

2. Determinar la solución básica factible asociada a la base B.
   Para ello se hace $x_R = 0$ y $x_B = \overline{b} = B^{-1}b$ ($z = c_B^T x_B$).

Resumen del Algoritmo Simplex

3. Determinar si esta solución es óptima. Chequeamos el criterio de optimalidad, para ello calculamos $\overline{c}_j = c_j - \pi A_{\cdot j} \quad \forall j$ no básico, con $\pi = c_B^T B^{-1}$.
   Si $\overline{c}_j \geq 0 \quad \forall j$, la solución es **óptima, parar**. En caso contrario, se efectúa el cambio de base.

4. Determinar la columna que entra a la base. Sea $\overline{c}_s = \min_{\overline{c}_j < 0} \{\overline{c}_j\}$ entonces la variable x_s aumentará su valor y la columna $A_{\cdot s}$ entra a la base.

5. Determinar la columna que sale de la base calculando $\overline{A}_{\cdot s} = B^{-1} A_{\cdot s}$. Si $\overline{A}_{\cdot s} \leq 0$, el problema es no acotado. Si no, x_s toma el valor igual a $\min_{\overline{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} \right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$.
   Entonces la variable básica de la ecuación r es la primera que se anula cuando x_s crece. Por lo tanto, $A_{\cdot r}$ sale de la base.

$$\overline{a}_{rs} \longrightarrow \text{pivote}$$

6. Actualizar la base y volver a (1)

Soluciones Básicas Degeneradas

Qué pasa cuándo en (5) hay empates?

La columna que sale de la base está asociada a la primera variable que al efectuar el reemplazo se anula.

Veamos qué pasa cuándo más de una se anula simultáneamente durante el cambio de base.

Para que una variable básica se anule durante una iteración del SIMPLEX es necesario y suficiente que la columna asociada a ella entre a la base en reemplazo de la columna asociada a una variable que ya era nula o que el mínimo de $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$ (criterio de salida) no sea único de modo que 2 o más variables básicas se anulen simultáneamente.

Ej:

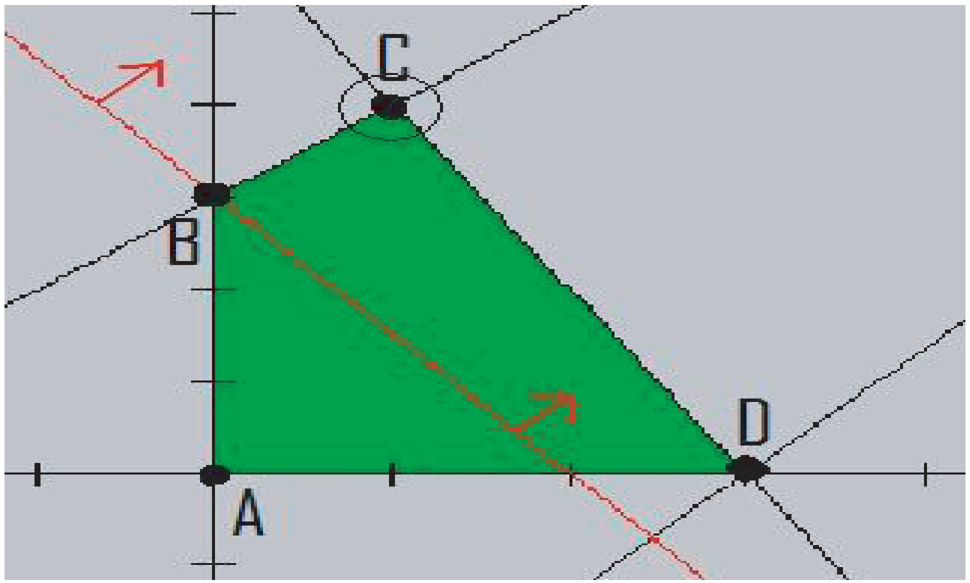
$$\begin{array}{rrcrcr} & \multicolumn{5}{c}{\max z = 3x_1 + 2x_2} \\ \text{s.a.} & -3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & 4x_1 & - & 3x_2 & \leq & 12 \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

Soluciones Básicas Degeneradas

Forma estándar:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\text{mín}\, z = & -3x_1 & - & 2x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.a.} & -3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 9 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
 & 4x_1 & - & 3x_2 & & & & & + & x_5 & = & 12
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



Soluciones Básicas Degeneradas

- Punto A $\longrightarrow B = [A_{\cdot 3}, A_{\cdot 4}, A_{\cdot 5}]$

  Solución Básica Factible $\longrightarrow \begin{cases} x_4 = 6, x_5 = 12, x_3 = 9 \quad z = 0 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$

- Punto B $\longrightarrow B = [A_{\cdot 2}, A_{\cdot 4}, A_{\cdot 5}]$

  Solución Básica Factible $\longrightarrow \begin{cases} x_4 = 3, x_5 = 21, x_2 = 3 \quad z = -6 \\ x_1 = x_3 = 0 \end{cases}$

- Punto C $\longrightarrow B = [A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 5}]$

  Solución Básica Factible $\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 4, x_5 = 20 \quad z = -11 \\ x_3 = x_4 = 0 \end{cases}$

- Punto D $\longrightarrow$ 3 bases posibles $\begin{cases} B = [A_{\cdot 1}, A_{\cdot 3}, A_{\cdot 4}] \\ B = [A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 3}] \\ B = [A_{\cdot 1}, A_{\cdot 3}, A_{\cdot 5}] \end{cases}$

  Solución Básica Factible $\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 18 \quad z = -9 \\ x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$

Soluciones Básicas Degeneradas

La última solución básica factible contiene una variable básica cuyo valor es 0, cualquiera sea la base elegida.

Definición:
Sea el (PL) en forma estándar

$$\text{(PL)}\, \text{mín}\, z = c^T x$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Además se sabe que $rg(A) = m$.

Una solución básica se dice degenerada $\Leftrightarrow$ contiene al menos una variable básica cuyo valor es 0, o sea

$$\Leftrightarrow |\{x_j / x_j \neq 0\}| < m$$

Solución Básica Factible Inicial

Cómo encontrar una base primal factible?

Si las restricciones son de la forma $Ax \leq b$, $x \geq 0$, las columnas asociadas a las variables de holgura forman la identidad.

Si $rg(A) = m$ y el vector b es no negativo, entonces la base formada por las columnas de las variables de holgura es **primal factible**, luego el SIMPLEX puede comenzar con esa base.

En general, esto no es tan simple. Veamos una forma sistemática de obtener esta solución básica factible inicial, si existe.

Tenemos el (PL) estándar

$$\begin{aligned} \text{(PL)}\ \text{mín}\ & c^T x \\ \text{s.a.}\quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Definamos un problema auxiliar asociado al (PL).

Solución Básica Factible Inicial

Las restricciones del nuevo problema serán:

$$Ax + It = b$$

$$x, t \geq 0$$

$t \in R^m$, t variables artificiales.

Para este conjunto de restricciones es claro que si b es no negativo, I es base primal factible (el SIMPLEX puede empezar desde ahí).

Si b tiene componentes negativas, la ecuación correspondiente se puede multiplicar por -1.

Para recuperar el problema original, se debe forzar a todas las variables artificiales a tomar valor 0. ($A\overline{x} = b \Leftrightarrow A\overline{x} + I\bar{t} = b$ con $\bar{t} = 0$).

Veamos como eliminar las variables artificiales.

Fase I del Simplex

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}_1)\, \min w = \sum_{i=1}^{m} t_i \\
\text{s.a.} \quad & Ax + It = b \quad , b \geq 0 \\
& x, t \geq 0
\end{aligned}
$$

La solución básica factible inicial para (P_1) es $x = 0$ y $t = b$, $B = I$.

Teorema:
El (PL) admite solución factible $\Leftrightarrow$ el valor óptimo del problema de fase I (P_1) es 0.

Demostración:
$\Rightarrow$) Si el (PL) admite solución factible, se construye una solución factible para (P_1) asignando valor 0 a las variables artificiales.
Como $w^* \geq 0$ (todos los $t_i \geq 0$) y esta solución factible tiene un valor $w = 0$, entonces es óptima para P_1.

Fase I del Simplex

$\Leftarrow$) Si $w^* = 0 \Rightarrow$ existe una solución factible para (P$_1$) $(\overline{x}, \bar{t})$ tal que $t_i = 0 \quad \forall i$.
Luego $\overline{x}$ es solución factible del (PL).

Conclusión:
Si el problema original tiene solución factible, la base óptima del problema de fase I es una base primal factible para el problema original (siempre que no contenga columnas asociadas a variables artificiales).

Cuando el valor óptmo del problema de fase I es nulo, hay 2 situaciones posibles:

1. **La base óptima del problema de fase I no contiene columnas asociadas a variables artificiales** $\longrightarrow$ se puede iniciar la fase II con la base óptima de la fase I.

2. La base óptima de (P$_1$) contiene algunas columnas asociadas a variables artificiales $\longrightarrow$ La base óptima es degenerada (las componentes de x_B asociadas a las variables artificiales son 0).

Fase I del Simplex

Aquí hay 2 posibilidades: o se conservan las variables artificiales básicas en la fase II hasta que salgan de la base, o se intenta eliminarlas sustituyéndolas por columnas asociadas a variables del problema original.

Ejemplos: Clase auxiliar

Complejidad del Algoritmo Simplex

Es eficiente simplex para resolver problemas lineales?

- En general sí, aunque en algunos casos puede ser muy ineficiente.
- Recordemos que el SIMPLEX recorre los puntos extremos de un poliedro y el número de éstos puede llegar a ser exponencial en el tamaño del problema.
- En 1972 V. Klee y G. Minty desarrollaron un ejemplo (PL) en n variables para el cual el SIMPLEX examina $O(2^n)$ vértices del poliedro antes de llegar al óptimo.
- O sea que para el caso el algoritmo SIMPLEX tiene un mal comportamiento, al menos con las reglas de pivotéo que se usan en la actualidad.
- Existen algunos estudios sobre la complejidad promedio del SIMPLEX, asumiendo cierto modelo probabilístico para las posibles instancias de un (PL).
- Los resultados en este caso son de $O(\text{mín}\{n, m\})$.

Complejidad del Algoritmo Simplex

- Hasta lo que lo que se ha dicho aquí todavía está abierta la siguiente pregunta:
  Es Programación Lineal un problema polinomial?
  O sea, existe algún algoritmo que siempre resuelva un (PL) en tiempo polinomial en el tamaño del problema?

  SI. El primero que aparece en la literatura corresponde a un ruso de nombre Khachiyan y fue publicado en 1979.

  Se lo conoce como el **Método de las Elipsoides**.

  Complejidad $\longrightarrow O(Ln^5)$ donde L es el número de bits necesarios para almacenar los datos del problema. (m no figura en el orden pues asumimos $n >> m$)

  $\therefore$ Programación Lineal $\in P$ y el Método de las Elipsoides es teóricamente mejor que el SIMPLEX (en el sentido del peor caso).

  En la práctica, en la gran mayoría de los casos, el SIMPLEX funciona mucho mejor.

- En 1984, Karmarkar dio a conocer un nuevo algoritmo para (PL), también de tiempo polinomial, pero esta vez se anunciaba que también funcionaba mejor que el SIMPLEX en la práctica (Complejidad Teórica $\longrightarrow O(Ln^{3\cdot 5})$).

Complejidad del Algoritmo Simplex

La característica central de este algoritmo es que se mueve por el interior de la región factible (y no por los vértices, como el SIMPLEX). Se lo conoce como un **algoritmo de punto interior**.

- A partir de 1984 otros algoritmos de punto interior fueron desarrollados para Programación Lineal (el de mejor complejidad teórica es el Nesterov y Nemirovskii (1994) de $O(Lm^3)$).

- La conclusión actual es que efectivamente pueden ser mejores que SIMPLEX, especialmente para problemas de gran tamaño.

- De todos modos, como consecuencia de la aparición de los algoritmos de punto interior, los defensores del SIMPLEX buscaron nuevas maneras de optimizar su funcionamiento.

- Así, las implementaciones del algoritmo disponibles en softwares como CPLEX incorporaron todos los adelantos teóricos y numéricos desarrollados hasta ahora.

- Las implementaciones actuales del SIMPLEX pueden ser más de 100 veces más rápidas que las antiguas.

Cotas Superiores al Valor Óptimo

Supongamos que tenemos el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{llllll}
\text{máx} & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & \\
\text{s.a.} & x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
 & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
 & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

Más que resolver el problema, vamos a tratar de configurar una estimación del valor óptimo z^* de la función objetivo.

Para conseguir una buena cota inferior para z^* hay que encontrar un punto donde se alcanza una *razonablemente* buena solución factible.

Veamos:
$(0,0,1,0) \longrightarrow z^* \geq 5$
$(2,1,1,\frac{1}{3}) \longrightarrow z^* \geq 15$
$(3,0,2,0) \longrightarrow z^* \geq 22$

Cotas Superiores al Valor Óptimo

Está claro que este proceso de *adivinar* soluciones no es muy eficiente. Aún si se encuentra el óptimo no se tendrían pruebas de ello.

Ahora busquemos una cota superior para z^*: Multipliquemos la segunda restricción por $\frac{5}{3}$.

$$\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$$

Por lo tanto, toda solución factible (en particular una óptima) satisface:

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$$

$$\Rightarrow z^* \leq \frac{275}{3}$$

Podemos mejorar aún más la cota. Si sumamos las restricciones (2) y (3), tenemos:

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$$

$$\Rightarrow z^* \leq 58$$

Cotas Superiores al Valor Óptimo

Veamos como se puede sistematizar este análisis:

Si multiplicamos la primera restricción por un número $y_1 \geq 0$, la segunda por $y_2 \geq 0$ y la tercera por $y_3 \geq 0$ y luego las sumamos tenemos: (en nuestro último ejemplo $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1$)

$$y_1(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) \leq y_1$$
$$y_2(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) \leq 55y_2$$
$$y_3(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) \leq 3y_3$$
$$\downarrow$$
$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4$$
$$\leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Queremos que el lado izquierdo de la ecuación anterior sea cota superior de $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$. Esto se logra si:

$$y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4$$
$$-y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1$$
$$-y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5$$
$$3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3$$

Cotas Superiores al Valor Óptimo

Si los multiplicadores y_i son ≥ 0 y satisfacen estas 4 restricciones, tenemos que toda solución factible (x_1, x_2, x_3, x_4) satisface:

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

En particular, para el óptimo:

$$z^* \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Como queremos una cota superior lo más ajustada posible nos queda el siguiente problema:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ \text{s.a.} & y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4 \\ & -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ & -y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ & 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

El Problema Dual

Problema Primal (el original):

$$
\begin{array}{rlll}
\text{(A)}\, \text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

El dual:

$$
\begin{array}{rlll}
\text{(B)}\, \text{mín} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & \\
\text{s.a.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, \ldots, n \\
& y_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Como vimos en nuestro ejemplo, toda solución factible del dual otorga una cota superior al valor óptimo del primal.

Más explícitamente: si $(x_1, \ldots, x_n)$ es solución factible primal y $(y_1, \ldots, y_m)$ es solución factible dual, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{3}$$

Este resultado se conoce como **Teorema Débil de Dualidad**.

El Problema Dual

La prueba de esto que ya fue ilustrada con el ejemplo inicial puede resumirse de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

La desigualdad (1) es muy útil. Si logramos una solución factible primal $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ y una solución factible dual $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Podemos concluir que ambas son óptimas para sus respectivos problemas.

Es más, a partir de (1) se puede deducir que toda solución primal factible $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ satisface:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

El Problema Dual

Y toda solución dual factible $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ satisface:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Por Ejemplo:
(0,14,0,5) de nuestro ejemplo primal es óptima porque tenemos la siguiente solución dual factible: (11, 0, 6) y ambas dan valor de la función objetivo 29.

Teorema Fundamental de Dualidad: (Gale, Kuhn, Tucker. 1951)
Si el problema primal (A) tiene solución óptima $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$, entonces es dual (B) tiene solución óptima $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Teorema Fundamental de Dualidad

Antes de presentar la prueba, veamos su punto central: la solución óptima del dual puede ser calculada a partir de la última iteración del simplex en el primal.

En nuestro ejemplo: (Con x_5, x_6 y x_7 variables de holgura)

$$\begin{array}{ll} x_2 & = 14 - 2x_1 - 4x_3 - 5x_5 - 3x_7 \\ x_4 & = 5 - x_1 - x_3 - 2x_5 - x_7 \\ x_6 & = 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 + 11x_7 \\ \hline z & = 29 - x_1 - 2x_3 - \underbrace{\underline{11}x_5 - \underline{6}x_7} \end{array}$$

Óptimos: A $\Rightarrow$ (0, 14, 0, 5) $\longleftrightarrow$ B $\Rightarrow$ (11, 0, 6)

Puede verse que cada variable de holgura del primal está asociada naturalmente con 1 variable del dual:
x_5 var. de holgura de la 1a restricción $\longleftrightarrow$ y_1 multiplicador de la primera restricción
x_6 var. de holgura de la 2a restricción $\longleftrightarrow$ y_2 multiplicador de la segunda restricción
x_7 var. de holgura de la 3a restricción $\longleftrightarrow$ y_3 multiplicador de la tercera restricción

Teorema Fundamental de Dualidad

Mágicamente, el óptimo del dual es (11, 0, 6) que corresponde a los coeficientes (cambiados de signos) de la fórmula de z para x_5, x_6, x_7 en la última iteración del SIMPLEX primal.

Veamos que no es magia.

Demostración:
Ya sabemos que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Para toda solución factible $(x_1, \ldots, x_n)$ primal factible, $(y_1, \ldots, y_m)$ dual factible.

Entonces, alcanza con encontrar una solución factible del dual $(y_1, \ldots, y_m)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Teorema Fundamental de Dualidad

Resolvemos el primal por el SIMPLEX introduciendo primero las variables slacks

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, m)$$

En la última iteración del SIMPLEX, tenemos

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k \quad \bar{c}_k \leq 0 \quad \forall k$$

Recordemos que $\bar{c}_k = 0$ cuando x_k es básica.

z^* es el valor óptimo de la función objetivo. Así: $z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$

Definimos

$$y_i^* = -\bar{c}_{n+i} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

y vamos a probar que ésta es solución dual factible que verifica $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

Teorema Fundamental de Dualidad

Veamoslo:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* + \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

Con $y_i^* = -\overline{c}_{n+i}$ y $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j$$

Para que la igualdad valga para toda elección de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ debemos tener:

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \quad \text{y} \quad c_j = \overline{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \quad j = 1, \ldots, n$$

Como $\overline{c}_k \leq 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n+m$ (recordemos que estamos maximizando)

Teorema Fundamental de Dualidad

Sale que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{y} \quad y_i^* \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad (y_i^* = -\bar{c}_{n+i})$$

Entonces, $y_1^*, \ldots, y_m^*$ es solución factible dual que verifica la igualdad pedida.

Ejercicio: El dual del dual es el primal.

PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN	PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN
Restricciones	**Variables**
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestricta
$\leq$	≤ 0
Variables	**Restricciones**
≥ 0	$\leq$
Irrestricta	$=$
≤ 0	$\geq$

Teorema Fundamental de Dualidad

Si consideramos el primal en forma estandar:

$$\begin{aligned} \text{(P)}\,\text{mín} \quad & z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

El dual escogido es:

$$\begin{aligned} \text{(D)}\,\text{máx} \quad & w = b^T y \\ \text{s.a.} \quad & A^T y \leq c \\ & y \text{ irrestricta} \end{aligned}$$

Ejercicio:
Usar lo que se vio en la definición del dual para ver que (D) queda de esta manera.

Holgura Complementaria

Recordemos que teniamos los siguientes problemas primal y dual:

$$
\begin{array}{rlll}
\text{(P)}\,\text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & & i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 & & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
\text{(D)}\,\text{mín} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & \\
\text{s.a.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & & j = 1, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0 & & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Veamos una nueva forma de chequear que 2 soluciones factibles x^* o y^* primal y dual respectivamente son óptimas:

Holgura Complementaria

Teorema:
Sean $x_1^*, \ldots, x_n^*$ solución factible del primal e $y_1^*, \ldots, y_m^*$ solución factible del dual. Las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para optimalidad simultánea de x^* e y^*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ o } x_j^* = 0 \text{ (o ambas) } \forall j = 1, \ldots, n$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ o } y_i^* = 0 \text{ (o ambas) } \forall i = 1, \ldots, m$$

Demostración:
x^* e y^* factibles, entonces:

$$c_j x_j^* \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* \quad j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq b_i y_i^* \quad j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

Holgura Complementaria

y así:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Se verifica la igualdad y por lo tanto ambos son óptimos si y sólo si hay igualdad en (2) y (3).

$$\text{Igualdad en (2)} \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ o } x_j^* = 0$$

$$\text{Igualdad en (3)} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ o } y_i^* = 0$$

Obsrvación: Las condiciones del Teorema de Holgura Complementaria ganan simplicidad si introducimos las variables slack:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad i = 1, \ldots, m$$

Holgura Complementaria

$$y_{m+j} = -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \quad j = 1, \ldots, n$$

El Teorema de Holgura Complementaria puede reescribirse de la siguiente forma:

Teorema:
Una solución factible $x_1^*, \ldots, x_n^*$ del primal es óptima si y sólo si existen números $y_1^*, \ldots, y_m^*$ tal que:

$$\text{(A)} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j & \text{cuando } x_j^* > 0 \\ y_i^* = 0 & \text{cuando } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \end{cases}$$

y tal que

$$\text{(B)} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j & \forall j = 1, \ldots, n \\ y_i^* \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Holgura Complementaria

Demostración:

$\Rightarrow$)

Si x^* es óptimo del primal $\Rightarrow \exists y^*$ solución óptima del dual por el teorema de dualidad.
y^* es factible, así satisface las restricciones del dual.
Por Teorema de Holgura Complementaria, satisface las condiciones pedidas.

$\Leftarrow$)

Si y^* satisface (B), es factible para el dual.
Si satisface también (A), por el Teorema de Holgura Complementaria x^* es óptimo primal e y^* es óptimo dual.

Observación: Esta estrategia para verificar optimalidad será más útil si el sistema de (A) tiene solución única. Se puede probar que si $x_1^*, \ldots, x_n^*$ es solución factible básica no degenerada del problema primal $\Rightarrow$ el sistema de (A) tiene solución única.

Significado Económico de las Variables Duales

$$\begin{array}{rll} \text{(P)}\, \text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Supongamos que esta formulación proviene de una aplicación y tratemos de interpretar el significado de las variables duales:

- Sea nuestro viejo ejemplo en que maximizábamos ganancia en una fábrica de muebles.
- Cada x_j mide cuantas unidades de producto j (mesas y sillas) se venden.
- Cada b_i especifica la cantidad disponible del recurso i (metal o madera).
- Cada a_{ij} expresa cantidad de recurso i requerido al fabricar una unidad del producto j.
- Cada c_j expresa ganancia en $ por vender una unidad de producto j.

Significado Económico de las Variables Duales

Lo que se espera es que cada variable dual y_i mida el valor unitario en $ del recurso i.

El siguiente teorema (demo en la práctica) valida esta idea.

Teorema:
Si el problema primal (P) tiene al menos una solución óptima básica no degenerada, entonces existe $\varepsilon > 0$ con la siguiente propiedad:
Si $|t_i| \leq \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, m$, entonces el problema

$$\begin{array}{rll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + t_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Tiene solución óptima y su valor óptimo es

$$z^* \quad + \quad \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^*$$

valor óptimo de (P) solución óptima del dual de (P)

Nota: La unicidad de $y_1^*, \ldots, y_m^*$ está garantizada por la observación anterior.

Significado Económico de las Variables Duales

Lo que el Teorema dice es que con cada unidad extra de recursos i, el beneficio de la firma aumenta y_i^* pesos.

$$y_i^* \longrightarrow \text{ valor marginal del recurso } i$$

O sea que si tuvieramos que pagar cierta cantidad de dinero por una unidad extra de recurso i, sabemos que nos conviene pagar hasta y_i^* pesos.

Otro ejemplo:
Se desea diseñar un plan de producción de máximo benficio para dos posibles productos que se fabrican utilizando 3 insumos.
Cada insumo tiene disponibilidad máxima.
El modelo lineal es el siguiente:

$$\begin{array}{llll}
\text{máx}\, z = & x_1 & +1,5x_2 & \\
\text{s.a.} & 2x_1 & +2x_2 & \leq 160 \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq 120 \\
 & 4x_1 & +2x_2 & \leq 280 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Significado Económico de las Variables Duales

x_1: Cantidad de unidades del producto 1.
x_2: Cantidad de unidades del producto 2.

La solución óptima es $x_1^* = 40$, $x_2^* = 40$ y $z^* = 100$, o sea se producen 40 unidades del producto 1, 40 del producto 2 y se obtiene un beneficio de $100.

Sean x_3, x_4, x_5 las variables de holgura correspondientes a las 3 restricciones, respectivamente.
Luego $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$ y $x_5^* = 40$, es decir se usan totalmente los insumos 1 y 2, mientras que no se usan 40 unidades del insumo 3.

El dual correspondiente es:

$$
\begin{array}{llllll}
\min w = & 160y_1 & +120y_2 & +280y_3 & \\
\text{s.a.} & 2y_1 & +y_2 & +4y_3 & \geq 1 \\
 & 2y_1 & +2y_2 & +2y_3 & \geq 1,5 \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Significado Económico de las Variables Duales

Como $x_1^* > 0$ y $x_2^* > 0$, las restricciones duales son activas en el óptimo, es decir:

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 = 1$$

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 1,5$$

Además, como $x_5^* > 0$, la variable dual correspondiente (y_3) debe ser 0 en el óptimo $(y_3^* = 0)$.

Así:

$$2y_1^* + y_2^* = 1$$
$$2y_1^* + 2y_2^* = 1,5$$

Despejando obtenemos $y_1^* = \frac{1}{4}$, $y_2^* = \frac{1}{2}$ y $y_3^* = 0$, con $w = 100$.

Significado Económico de las Variables Duales

Luego:

- y_3^* implica que el beneficio no varía si se efectúan pequeñas modificaciones en la disponibilidad del insumo 3.

- Si se aumenta (disminuye) la disponibilidad de los insumos 1 y 2 en pequeñas cantidades, el beneficio total también aumentará (disminuirá).

- Cada unidad adicional del insumo 1 significa aumentar el beneficio total en $0,25, luego el máximo precio que conviene pagar por cada unidad extra de insumo 1 es $0,25.

- Cada unidad adicional del insumo 2 significa aumentar el beneficio total en $0,5, luego el máximo precio que conviene pagar por cada unidad extra de insumo 2 es $0,5.

- Cuántas unidades adicionales conviene adquirir? Los valores anteriores valen para $pequeñas$ variaciones en la disponibilidad de los insumos, o sea mientras la base óptima no cambie (lo estudiaremos haciendo análisis de sensibilidad).

Resultados Finales de Dualidad

- Dual del Dual $\longrightarrow$ Primal

PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN	PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN
Restricciones	**Variables**
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestricta
$\leq$	≤ 0
Variables	**Restricciones**
≥ 0	$\leq$
Irrestricta	$=$
≤ 0	$\geq$

- Corolario de este resultado y Teorema de Dualidad:

$$\text{Primal tiene solución óptima} \;\Leftrightarrow\; \text{Dual tiene solución óptima}$$

Resultados Finales de Dualidad

- La condición $\sum c_j x_j \leq \sum b_i y_i$ con x_j, y_i soluciones factibles de primal y dual respectivamente implica:

$$\text{Primal no acotado} \;\Rightarrow\; \text{Dual infactible}$$

$$\text{Dual no acotado} \;\Rightarrow\; \text{Primal infactible}$$

- Por último puede pasar que Primal y Dual sean infactibles (Ejercicio: Encontrar un ejemplo).

Análisis de Sensibilidad

- **Objetivos:** Identificar los parámetros para los cuales la solución óptima es más sensible, es decir aquellos que al sufrir una pequeña variación en su valor implican un mayor impacto en la solución óptima.

- Los parámetros del modelo (c_j, b_i, a_{ij}) se los asume como constantes conocidas, pero en la práctica estos valores suelen ser estimaciones por lo que es interesante analizar el efecto que tienen sobre la solución posibles errores en los parámetros.

- Buscaremos intervalos o rangos de variación de los valores del lado derecho (b_i) y de los coeficientes de la función objetivo (c_j) que permiten que la base óptima obtenida siga siendo óptima (también puede hacerse para los coeficientes a_{ij})

Análisis de Sensibilidad

Se tiene el problema:

$$\begin{aligned} \text{(PL)}\, \text{mín} \quad & z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

1. **Variación de los coeficientes de la Función Objetivo** (c_j)
   Recordemos que en el análisis gráfico variar este parámetro afectaba la pendiente o inclinación del hiperplano correspondiente a cada curva de nivel de la función objetivo.

   Mientras $\overline{c}_j \geq 0 \quad \forall j$, la base B^* seguirá siendo óptima.

   Supongamos que c_k es el coeficiente que se ha de analizar. Se debe analizar por separado los casos de si la variable correspondiente es o no básica.

   a) **Variable x_k es no básica**
   Recordemos que:

$$\overline{c}_k = c_k - c_{B^*}^T B^{*-1} A_{\cdot k} \quad (\overline{c}_j = 0, \forall j \text{ básica})$$

Análisis de Sensibilidad

Así, modificar c_k para un x_k no básico solo afecta a $\overline{c}_k$.
Luego, la base B^* se mantendrá óptima si $\overline{c}_k$ sigue siendo ≥ 0, o sea, si

$$c_k \geq c_{B^*}^T B^{*-1} A_{.k}$$

b) **Variable x_k es básica**
En este caso, el valor de c_k influye en el valor de todos los costos reducidos, puesto que c_k es un elemento de c_{B^*}.
Por construcción, $\overline{c}_j = 0$, $\forall j$ básico. Luego sólo debemos revisar la condición de optimalidad para los costos reducidos de las variables no básicas.
Sea $L = \{l / x_l \text{ es básica}\}$

$$\begin{aligned} \overline{c}_j &= c_j - c_{B^*}^T \overline{A}_{.j} \\ &= c_j - \textstyle\sum_{l \in L} c_l \overline{a}_{lj} \quad \forall j \text{ tal que } x_j \text{ es no básica} \end{aligned}$$

Así queremos que

$$c_j - \sum_{l \in L} c_l \overline{a}_{lj} \geq 0$$

Análisis de Sensibilidad

$$c_j - \sum_{l \in L, l \neq k} c_l \overline{a}_{lj} - c_k \overline{a}_{kj} \geq 0 \quad \forall j \text{ no básico}$$

Finalmente

- Si $\overline{a}_{kj} > 0$

$$c_k \leq \frac{1}{\overline{a}_{kj}} \left[c_j - \sum_{l \in L, l \neq k} c_l \overline{a}_{lj} \right] \quad j \text{ no básico}$$

- Si $\overline{a}_{kj} < 0$

$$c_k \geq \frac{1}{\overline{a}_{kj}} \left[c_j - \sum_{l \in L, l \neq k} c_l \overline{a}_{lj} \right] \quad j \text{ no básico}$$

Luego en este rango es donde la base sigue siendo óptima.
Notar que si $\overline{a}_{kj} = 0$ entonces c_k puede moverse sin restricciones.

Análisis de Sensibilidad

2. **Vriación del Vector del Lado Derecho** (b_i)
   Variaciones en el valor de un b_i puede afectar la factibilidad de la solución.

   Para establecer el rango de valores donde la modificación de un b_i no afecta la solución, se debe verificar la condición de factibilidad primal, o sea $\bar{b} = B^{*-1}b \geq 0$.

Ejemplo

Tenemos el siguiente problema de una dieta alimenticia, donde x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 son las cantidades de huevos, papas, carnes, leche y espinacas, que se han de incluir en la dieta, respectivamente.

Los requerimientos se refieren a cantidades mínimas de fierro (Fe) y vitamina B. La función objetivo representa el costo total (en $).

Los contenidos de fierro y vitamina B, junto con los costos y requerimientos mínimos se muestran en la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
1	0	1	1	2	-1	0	21	Fierro
0	1	2	1	1	0	-1	12	Vit. B
20	10	31	11	12	0	0	z	Costo

En el óptimo tenemos que:

x_B	$\bar{b}$	B^{*-1}	
x_4	3	-1	2
x_5	9	1	-1

Ejemplo

O sea que la dieta óptima se compone de 3 unidades de leche y 9 unidades de espinaca.

El costo total es $z^* = \$141$.

1. **Análisis de sensibilidad de un costo no básico**
   Cuánto podría variar el precio de los huevos sin modificar la dieta óptima?

$$\overline{c}_1 = c_1 - c_{B^*}^T B^{*-1} A_{.1}$$

Con $c_{B^*}^T B^{*-1} = \pi^*$.

$$\pi^* = (11, 12) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (1, 10)$$

O sea, $\overline{c}_1 = c_1 - (1, 10) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$

$$\Rightarrow c_1 \geq 1$$

Ejemplo

Luego, la dieta óptima no cambia si el precio de los huevos es $\geq \$1$.

Ejercicio: Analizar que pasa si el precio de los huevos es de $0,50.

2. **Análisis de sensibilidad de un costo básico**
   Qué ocurre con la dieta óptima si el precio de la leche varía?

$$c_B = (c_4, c_5) = (c_4, 12)$$

$$\pi^* = (c_4, 12) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (12 - c_4, 2c_4 - 12)$$

$$\bar{c}_1 = c_1 - \pi^* A_{.1} = c_4 + 8$$

$$\bar{c}_2 = -2c_4 + 22$$

$$\bar{c}_3 = -3c_4 + 43$$

Ejemplo

$$\bar{c}_6 = -c_4 + 12$$
$$\bar{c}_7 = 2c_4 - 12$$

Imponiendo la condición de optimalidad, obtenemos:

$$c_4 + 8 \geq 0 \longrightarrow c_4 \geq -8$$

$$-2c_4 + 22 \geq 0 \longrightarrow c_4 \leq 11$$
$$-3c_4 + 43 \geq 0 \longrightarrow c_4 \leq \frac{43}{3} \approx 14$$
$$-c_4 + 12 \geq 0 \longrightarrow c_4 \leq 12$$
$$2c_4 - 12 \geq 0 \longrightarrow c_4 \geq 6$$

O sea, si $6 \leq c_4 \leq 11$, la base B^* sigue siendo óptima.

La dieta estará compuesta de leche y espinacas si el costo de la leche no aumenta a $11 o disminuye hasta $6.

Ejemplo

Ejercicio:
Qué pasa si el costo de la leche es de \$5?
Y si es de \$ 12?

3. **Análisis de sensibilidad del vector lado derecho**
Será necesario modificar la dieta si el requerimiento de fierro aumenta o disminuye?

La condición de factibilidad primal es:

$$\bar{b} = B^{*-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 12 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$24 - b_1 \geq 0$$
$$b_1 - 12 \geq 0$$

Luego, si $12 \leq b_1 \leq 24$ la base óptima se mantiene primal factible.

Ejemplo

O sea, la dieta óptima estará compuesta de leche y espinacas si el requerimiento de fierro no aumenta a más de 24 ni disminuye a menos de 12.

Este análisis se podría hacer para varias componentes del vector b en forma simultánea, como se muestra a continuación:

$$-b_1 + 2b_2 \geq 0$$

$$b_1 - b_2 \geq 0$$
$$\Rightarrow b_2 \leq b_1 \leq 2b_2$$

Análisis Post-Óptimal

Hemos visto bajo que rangos la solución óptima se mantiene. Ahora, cómo usar la solución que tenemos para encontrar el nuevo óptimo si en alguno de los parámetros nos salimos del rango?

Allí aparecen los ejercicios adicionales que planteamos recientemente.

La idea es aplicar el SIMPLEX a partir de la solución que tenemos, si lo que se modificó fue un coeficiente de la función objetivo, e iterar desde allí (buscando el j tal que $\bar{c}_j < 0$ para hacerlo entrar a la base).

En cambio, si se modificó el vector b y se perdió factibilidad primal, entonces podremos iterar con SIMPLEX en el problema dual, a partir del correspondiente óptimo del dual original.